http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Le 12 - 12 - 2016

Nom: Khadijetou /Ahmed saïd.

Exo1:

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 2$, $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer U_1, U_2, U_3.

2) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n = U_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Solution:

1) $n=0 \Rightarrow U_1 = 1/4\, U_0 + 1/2\,(3/4)^0$

$= 1/4 \times 2 + 1/2 \times 1$

$= 1/2 + 1/2$

$\boxed{U_1 = 1}$

$n=1 \Rightarrow U_2 = 1/4\, U_1 + 1/2\,(3/4)^1$

$= 1/4 \times 1 + 1/2 \times 3/4$

$= 2/8 + 3/8$

$\boxed{U_2 = 5/8}$

$n=2 \Rightarrow U_3 = 1/4\, U_2 + 1/2\,(3/4)^2$

$= 1/4 \times 5/8 + 1/2\,(9/16)$

$= 14/32$

$\boxed{U_3 = 7/16}$

2) $V_n = U_n - (3/4)^n$

$V_{n+1} = U_{n+1} - (3/4)^{n+1}$

$= 1/4\, U_n + 1/2\,(3/4)^n - (3/4)^1 (3/4)^n$

$= 1/4\, U_n + (1/2 - 3/4)\,(3/4)^n$

$= 1/4\, U_n - 1/4\,(3/4)^n$

$= 1/4\,(U_n - (3/4)^n)$

$= 1/4 \cdot V_n$

alors (V_n) et une suite géometrique de raison $q = 1/4$ et de 1er terme

$V_0 = U_0 - (3/4)^0 \Rightarrow V_0 = 2 - 1$

$\Rightarrow V_0 = 1$

Comme $V_n = V_0 \cdot q^n$, on a :

$V_n = 1 \cdot (1/4)^n \Rightarrow \boxed{V_n = (1/4)^n}$

on a : $V_n = U_n - (3/4)^n \Rightarrow U_n = V_n + (3/4)^n$

alors $\boxed{U_n = (1/4)^n + (3/4)^n}$

3) $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

On pose $W_n = (3/4)^n$

$\Rightarrow U_n = V_n + W_n$

$S_n = (V_0 + W_0) + (V_1 + W_1) + \cdots + (V_n + W_n)$

$S_n = (V_0 + V_1 + \cdots + V_n) + (W_0 + W_1 + \cdots + W_n)$

(V_n) et une suite géometrique avec $q_1 = 1/4$, $V_0 = 1$

(W_n) et une suite géometrique avec $q_2 = 3/4$, $W_0 = 1$

d'où :

$$S_n = V_0 \frac{1-(1/4)^{n+1}}{1-1/4} + W_0 \frac{1-(3/4)^{n+1}}{1-3/4}$$

$$S_n = \frac{1-(1/4)^{n+1}}{3/4} + \frac{1-(3/4)^{n+1}}{1/4}$$

$= 3/4\,(1-(1/4)^{n+1}) + 4\,(1-(3/4)^{n+1})$

$= 4/3 - 4/3\,(1/4)^{n+1} + 4 - 4\,(3/4)^{n+1}$

$$\boxed{S_n = 16/3 - 4/3\,(1/4)^{n+1} - 4\,(3/4)^{n+1}}$$