Arithmetique :

Deich/Bahnein
Roughaye Diallo

Exercice 3

1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.
2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Solution :

1°) Les reste de la division de 5^p par 13 Pour P entier naturel

$5^0 \equiv 1 [13]$

$5^1 \equiv 5 [13]$

$5^2 \equiv 12 [13]$

$5^3 \equiv 8 [13]$

$5^4 \equiv 1 [13]$

Le cycle est 4 alors pour $k \in \mathbb{N}$

$5^{4k} \equiv 1 [13]$

$5^{4k+1} \equiv 5 [13]$

$5^{4k+2} \equiv 12 [13]$

$5^{4k+3} \equiv 8 [13]$

$5^{4k+4} \equiv 1 [13]$

2°)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$

$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$

On a : $31 \equiv 5 [13]$

$(31)^{4n+1} \equiv 5^{4n+1} [13]$

$\boxed{(31)^{4n+1} \equiv 5 [13]}$ (1)

On a aussi

$18 \equiv 5 [13]$

et $4n-1 = 4(k+1)-1 = 4k+3$

$18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1} [13]$

$18^{4n-1} \equiv 5^{4k+3} [13]$

$\boxed{18^{4n-1} \equiv 8 [13]}$ (2)

$\Rightarrow$ (1) + (2) $= 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 13 [13]$

$\Rightarrow N \equiv 0 [13]$

N est divisible par 13.