Exercice 12 **Bac 2016**

On considère l'équation (E) : $5x-3y=17$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif.

Nom: Zeinebou/Mohamed
ELHoussein/Abdeljelil
classe: 7C / ERRAja

Solution d'exo Bac 2016 :

*Arithmétique :

1) a) on justifie que l'équation (E) admet des solution entières

* on a : (E) : $5x-3y=17$

PGCD $(5;3)=1$ et 1 est un diviseur de 17

Alors l'équation (E) admet des solution dans $\mathbb{Z}$

* on verifie que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E) :

$5\times 4-3\times 1=20-3=17$ on remplace (x,y) par $(4,1)$

Alors $(4,1)$ est une solution particulière de (E)

b) on determine l'ensemble des solutions (E)

* $\begin{cases} 5(x)-3y=17 \\ 5(4)-3(1)=17 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ par soustraction $5(x-4)-3(y-1)=0$

$\Rightarrow 5(x-4)=3(y-1)$ or : $5\wedge 3=1$ $\Rightarrow$ d'après le théorème de Gauss

on a : $3|(x-4)$ et $5|(y-1)$ $\Rightarrow$ il existe $K\in\mathbb{Z}$

t.q : $\begin{cases} x-4=3K \\ y-1=5K \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x=4+3K \\ y=1+5K \end{cases}$

1/2

$\Rightarrow$ l'ensemble de Solution (E)

$S = \{(3K+4\ ;\ 5K+1)\}\ K \in \mathbb{Z}$

on peut verifie la reciproque :

$5(3K+4) - 3(5K+1)$

$= 15K + 20 - 15K - 3$

$= 17$

car si : $a|b \Rightarrow a|bc$ $c \in \mathbb{Z}$

2. a) on montre que si $x|y$ alors $x|17$

* on a : $(x\ ;\ y)$ est un solution de (E) $\Rightarrow$ si $x|y$ alors $x|3y$

* D'autre part $x|5x$ Alors $x|(5x-3y) \Rightarrow x|17$

b) on remarque que la fraction $\frac{1+5m}{4+3}$ est du type y/x où $(x;y)$ est une Solution de (E)

* $\frac{1+5m}{1+4m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4+3m \mid 1+5m \Rightarrow x|y \Leftrightarrow x|17$

on deja demontrer dans (2,a)

$\Rightarrow x \in \{-17\ ;-1\ ;1\ ;17\} \rightarrow$ les diviseurs de 17

$\Rightarrow 4+3m \in \{-17\ ;-1\ ;-1\ ;17\}$ ①

$\Rightarrow 3m \in \{-21\ ;-5\ ;-3\ ;-21\}$ car on retranchit 4 dans ①

$\Rightarrow m \in \{-7\ ;-1\}$ car $3m \in \{-21\ ;-3\}$

Autre Méthode :

$(4+3m)|(1+5m) \Rightarrow (4+3m) \mid 3(1+5m) - 5(4+3m) \rightarrow$ car si $n|a \Rightarrow n|(a+bn)$

$\Rightarrow 4+3m \mid -17$ or les diviseurs de (-17) Sont :

① $\{-17\ ;-1\ ;\ 1\ ;\ 17\} \Rightarrow 4+3m$ ①

$\Rightarrow m \in \{-7\ ;-1\}$

2/2