Ramle , Dimbra , Aïchetou

Groube B2

Exercice 11

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que:

1) $\frac{b-a}{\cos^2 a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^2 b}$; $0<a<b<\frac{\pi}{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \le \sqrt{a+1}-\sqrt{a} \le \frac{1}{2\sqrt{a}}$; $a>0$

3) $\frac{\pi}{2}-2x \le \cot x - 1 \le \frac{\pi}{4}-x$; $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$

Solution: Exo 11

1) On pose $I =]0, \frac{\pi}{2}[$

$f(m) = \tan x$; $a, b \in I$ $a<b$

* f est derivable sur I
* $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

. Si $0<a<x<b<\frac{\pi}{2}$, alors

$0 = \cos\frac{\pi}{2} < \cos b < \cos x < \cos$

$0 < \cos b < \cos x < \cos a$

$0 < \cos^2 b < \cos^2 x < \cos^2 a$

$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 x} < \frac{1}{\cos^2 b}$

$\frac{1}{\cos^2 a} < f'(x) < \frac{1}{\cos^2 b}$

$m = \frac{1}{\cos^2 a}$ $M = \frac{1}{\cos^2 b}$

On applique le TIAF

$m\,(b-a) \leqslant f(b)-f(x) \leqslant M(b-a)$

$\frac{1}{\cos^2 b}(b-a) \leqslant \tan b - \tan a \leqslant \frac{1}{\cos^2 b}(b-a)$

$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leqslant \tan b - \tan a \leqslant \frac{b-a}{\cos^2 b}$

2) on pose $I =]0, +\infty[$

$f(x) = \sqrt{x}$, $a \in I$, $b = a+1$

On a :

1 f est derivable sur I

2 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Si $a \leqslant x \leqslant a+1$, alors

$0 < 2\sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{x} \leqslant 2\sqrt{a+1}$

$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}$

On prend $m = \frac{1}{2\sqrt{a+1}}$ $M = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

on applique le T.I.AF

$\frac{1}{2\sqrt{a+1}}(a+1-a) \leqslant f(a+1)-f(a) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(a+1-a)$

$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leqslant \sqrt{a+1}-\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Ramle , Dimbra, Aichetou

Groupe : B2

Exercice 2

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$.

Démontrer que f admet un prolongement par continuité g au point $x_0=0$.

Préciser g(x).

Exercice :

$$f(x) = \frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ (F.I) mais $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to 1} \frac{t^{2015}-1}{t-1}$

avec $\boxed{t = 1+x}$

or $\lim_{t\to 1} \frac{t^{2015}-1}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-\cancel{1})(t^{2014}+t^{2013}+\dots\dots+1)}{(t-\cancel{1})}$

$\Rightarrow \lim_{t\to 1} (t^{2014}+t^{2013}+\dots\dots+1) = 1^{2014}+1^{2013}+\dots\dots+1^0 = 2015$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 1} \frac{t^{2015}-1}{t-1} = 2015$$

Donc le prolongement par Continuité de f en $\boxed{x_0=0}$ est la fonct° g définie par :

$$g(x)\begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ g(0) = 2015 \end{cases}$$

• n est impaire $\Rightarrow (n-1) =$ Paire

$\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f_n(x) = -\infty$.

Donc Comme $\lim\limits_{\infty} f_n(x) = \infty$.

On Calcule : $\lim\limits_{\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.

$$\lim_{\pm\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{\infty} \frac{\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = \lim_{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

$$= \lim \frac{x^{n-1}}{|x|} = \mp\infty.$$

Donc C_{f_n} admet une B.P de direction (oy) aux voisinages de $\mp\infty$ $(n > 2)$.

b- $\boxed{\text{Si } n = 1}$

• $\lim\limits_{+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1\ x^2}} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1.$

C_{f_1} admet A.H de $y = 1$ au Voisinage de $(+\infty)$.

• $\lim\limits_{-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{-\infty} \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1.$

C_{f_1} admet AH : $y = -1$ au voisinage $(-\infty)$

C- $\boxed{\text{Si}, n = 2}$

• $\lim\limits_{+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2}{|x|} = \frac{x^2}{x} =$

$\lim\limits_{+\infty} x = +\infty.$

• $\lim\limits_{-\infty} f_2(x) = -\infty.$

Comme $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, On doit Calculer

• $\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\mp\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

$$= \lim_{\mp\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x} = \frac{x^2}{x.|x|}$$

- $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1.$

de même : $\lim_{-\infty} f_2(x) = \frac{x^2}{-x^2} = -1.$

On Calcule $\lim_{+\infty} \left(f(x) - x\right)$:

- $\lim_{+\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{+\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2\ 1}} - x\right)$

$$= \lim_{+\infty} \left(\frac{x^2 - x\ \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

On multipliont par l'expression Conjuguée :

$$= \lim_{+\infty} \left(\frac{x^2 - x\ \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2\ 1}} \times \left(\frac{x^2 + x\sqrt{x^2+1}}{x^2 + x\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^4} - x^2\ \cancel{(x^2+1)}}{(\sqrt{x^2+1})(x^2+x\sqrt{x^2\ 1})} = \lim_{+\infty} \frac{-x^2}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\left(x^2+x\sqrt{x+1}\right.}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\left(\cancel{x}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$\lim_{+\infty} \frac{-1}{+\infty} = 0 \Rightarrow$ A.O aux voisinages de $+\infty$

d'équation $y = x$, De même $\mathcal{C}_{f_2}$ admet A.O au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = -x$.

2) $f_{n+1}(x) = f_n(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{x^2+1}} = 0.$

$x^{n+1} - x^n = 0 \Longrightarrow x^n(x-1) = 0.$

$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$ • $x = 0$, $f_n(0) = 0 \Rightarrow O(0,0)$.
• $x = 1$, $f_n(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Donc toutes les Courbes passent par O (l'origine) et A.

3) On étudier le Signe de :

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$.

• n = Paire

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
x^n	+	0	+	0	+	
$x-1$	−		−	0	+	
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	−	0	−	0	+	
P.R	$\mathcal{C}_n$ / $\mathcal{C}_{n+1}$	P.I	$\mathcal{C}_n$ / $\mathcal{C}_{n+1}$	P.I	$\mathcal{C}_{n+1}$ / $\mathcal{C}_n$	

4) $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x^n}{1+x^2}$

$= \dfrac{nx^{n-1}(1+x^2) - x^{n+1}}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})}$

$= \dfrac{x^{n-1}(n+(n-1)x^2)}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})}$, $n \geq 1$

n : paire $\Rightarrow$ n-1 est impaire

$f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{1+\frac{1}{x^2}}$, $(n > 0)$ or

$f_n(x) = \dfrac{-x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

T.V :

x		0	
$f_n'(x)$	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

5) Si n est pair $\Rightarrow$ n-1 pair $f_n'(x) > 0 \Rightarrow f_n \nearrow$.

6) $U_n \begin{cases} U_0 \in \left]0;1\right[. \\ U_{n+1} = f_k(U_n) \end{cases}$ où k un entier fixe

a) Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant U_n \leqslant 1$

$n=0$, $0 \leqslant U_0 \leqslant 1$ vraie pour $n=0$

* on suppose $0 \leqslant U_n \leqslant 1$.
* Montrons pour U_{n+1}

$$\begin{cases} 0 \leqslant U_n \leqslant 1 \\ f_n \nearrow \end{cases} \Rightarrow f_n(0) \leqslant f_n(U_n) \leqslant f_n(1).$$

$$0 \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1.$$

b) Mq : $\forall n \geqslant 1$

$$U_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} U_n$$

on a : $$\begin{cases} U_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \\ U_n \leqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} U_n.$$

c) $U_{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} U_n \leqslant U_n$

$\Rightarrow U_n$ est $\searrow$

- U_n minorée et $\searrow$ $\Rightarrow (U_n)$ est Convergente.

6

Ramle , Dimbra , Aichetou

Groupe : B_2

Exercice 5

Soit f la fonction de variable réelle définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x)=\cos x$.

1) Démontrer que f réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Construire dans le même repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.

4) Démontrer que $f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=\pi$ pour tout x de J. Interpréter graphiquement

Exercice 5:

1) $f(x)=\cos x$, $I=[0,\pi]$.

$f'(x)=-\sin x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0$.

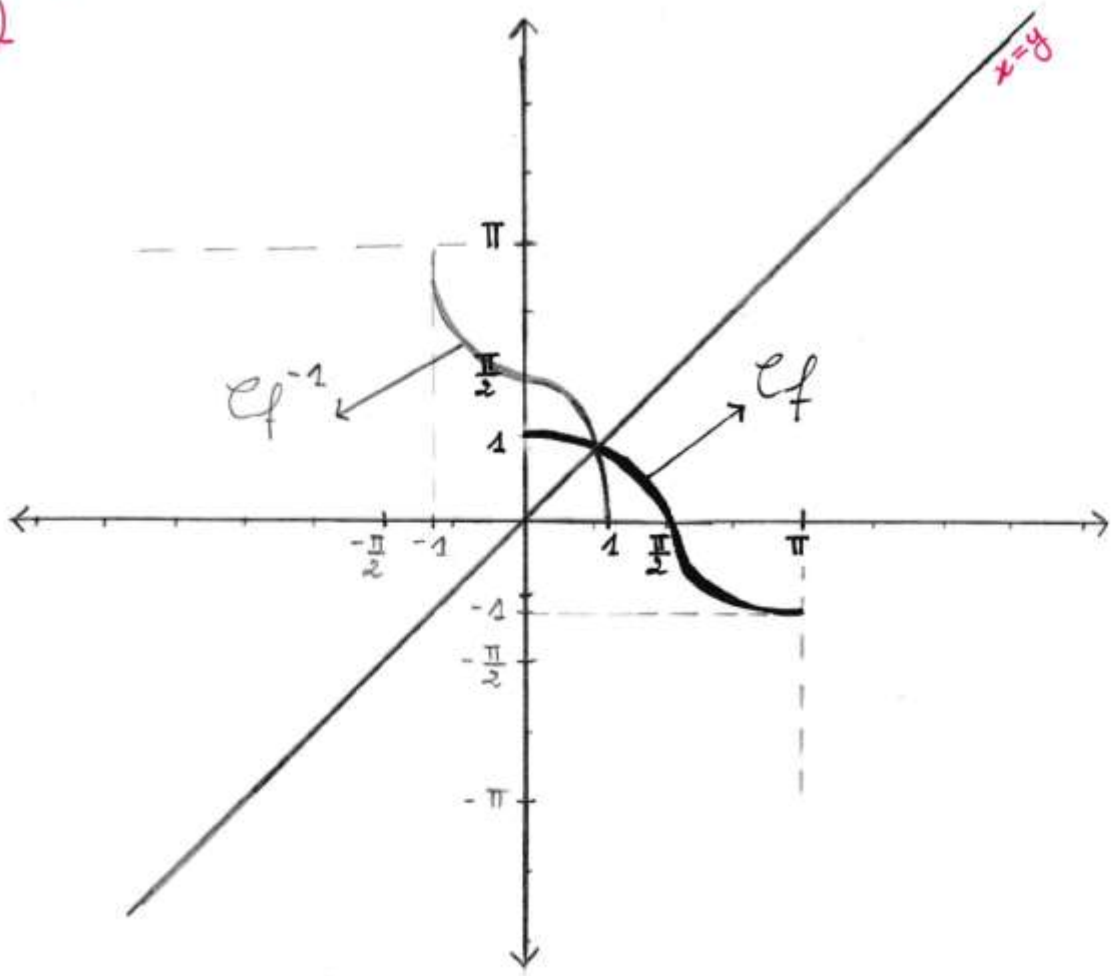
$\Rightarrow x\ 0$ ou $x=\pi$.

f est décroissante sur $]0,\pi[$.

$f(0)=1$, $f(\pi)=-1$

$\Rightarrow f$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]=J$

2)



$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$

$f(I) = J \Rightarrow [-1, 1]$.

f réalise une bijection de I vers J.

3) D'aprés le T.V de f :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

3) on a :

(1) $f :]0, \pi[\longrightarrow]-1, 1[$ est bijective.

(2) f est dérivable sur $]0, \pi[$.

(3) $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in]0, \pi[$, alors f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$.

. Pour Calculer $(f^{-1})'(x)$, on a :

$f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow f'(x) = -\sin x$.

$\Rightarrow f'(x) = -\sqrt{\sin^2 x}$

Car $\sin x \geq 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow f'(x) = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$

Car : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\sqrt{1 - (f(x))^2}}$.

Car $\cos x = f(x)$.
On a alors :

$$f'(f^{-1}(x)) = -\sqrt{1 - f(f^{-1}(x))^2}.$$

$$f'(f^{-1}(x)) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

D'où : $\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in]-1, 1[}$

4) Methode 1: (fonction auxiliaire)

On pose pour $x \in J$: $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$

On montre que : $g(x) = \pi$, pour tout $x \in J$ pour $x \in]-1,1[$.

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) + (-1)(f^{-1})'(-x)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Alors g est Constante sur $]-1, 1[$.

$g(\ ) = f^{-1}(0) + f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

$\left(f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \text{ Car } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right)$.

Donc $g(x) = \pi$, $x \in]-1, 1[$.

En particulier, pour $x = 1$ ou $x = -1$.

$g(1) = f^{-1}(1) + f^{-1}(-1) = 0 + \pi = \pi$.

$g(-1) = f^{-1}(-1) + f^{-1}(1) = \pi + 0 = \pi$.

Conclusion:

$$\boxed{\forall\ x \in [-1, 1]. \quad f'(x) + f^{-1}(-x) = \pi.}$$

Methode 2 : (Trigonometrie).

On sait que $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$.

$\Rightarrow f(\pi-\alpha) = -f(\alpha)$

Si $f(\alpha) = x$, alors $f^{-1}(x) = \alpha$.

et $f(x-\alpha) = -x \Rightarrow f^{-1}(-x) = \pi - \alpha$.

Par addition :

$f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = \alpha + \pi - \alpha$.

$$\boxed{f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = \pi \quad , \forall x \in J}$$

- Interpretation graphique :
  le point $A'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est un Centre de symetrie de la Courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1}.