Nom	fatimetou Mmt Med Mahmoud
classe	7C1
Etablissement	Elmaarif
N°	1773
Bac	2015 S.C

Exercice 1:

On pose $f(x,y) = 2x - 3y$

1. a) $\boxed{f(5,3) = 2.5 - 3.3 = 1}$

b) Deduison les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $2x - 3y = 1$

on a : $(5,3)$ est une solution particulière

Par la suite on a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2\times5 - 3\times3 = 1 \end{cases}$$

$$2(x-5) = 3(y-3)$$

or $2 \wedge 3 = 1$ et $2 / 3(y-1)$, d'après Gauss $2/(y-1) \Leftrightarrow y - 1 = 2K$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 2K+1}$

$3/(x-5) \Leftrightarrow x - 5 = 3K \Leftrightarrow \boxed{x = 3K+5}$

donc $S\{(3K+5); (2K+3),\ K \in \mathbb{Z}\}$

2) on pose $\forall n \geq 0$ $X_n = f(5^n; 3^n)$

$X_n = 2.5^n - 3.3^n$

a) Determinon les valeurs de n le reste de la division Euclidienne de X_n par 7.

faisons les congruences

$5^0 \equiv 1 [7]$	$3^0 \equiv 1 [7]$
$5^1 \equiv 5 [7]$	$3^1 \equiv 3 [7]$
$5^2 \equiv 4 [7]$	$3^2 \equiv 2 [7]$
$5^3 \equiv 6 [7]$	$3^3 \equiv 6 [7]$
$5^4 \equiv 2 [7]$	$3^4 \equiv 4 [7]$
$5^5 \equiv 3 [7]$	$3^5 \equiv 5 [7]$
$5^6 \equiv 1 [7]$	$3^6 \equiv 1 [7]$

La division euclidienne de n par 6 donne $n = 6K + r$ $0 \leq r \leq 5$

* Si $r = 0$ $n = 6K$

$$X_n = 2.5^{6K} - 3.3^{6K}$$
$$\equiv 2 - 3 [7]$$
$$\equiv -1 [7]$$
$$\equiv 6 [7]$$

Si $n = 6K$ le reste de X_n par 7 est 6

* Si $r = 1$ $n = 6K+1$

$$X_n = 2.5^{6K+1} - 3.3^{6K+1} [7]$$
$$\equiv 10 - 9 [7]$$
$$\equiv 1 [7]$$

si $n = 6K+1$ le reste de X_n par 7 est 1

* Si $r=2$ $\quad n=6K+2$

$$X_n = 2.5^{6K+2} - 3.3^{6K+2}$$
$$\equiv 50-27\,[7]$$
$$\equiv 23\,[7]$$
$$\equiv 2\,[7]$$

Si $n=6K+2$ le reste de X_n par 7 est 2

* Si $r=3$ $\quad n=6K+3$

$$X_n = 2.5^{6K+3} - 3.3^{6K+3}$$
$$\equiv 12-18\,[7]$$
$$\equiv -6\,[7]$$
$$\equiv 1\,[7]$$

Si $n=6K+3$ le reste de X_n par 7 est 1

* Si $r=4$ $\quad n=6K+4$

$$X_n = 2.5^{6K+4} - 3.3^{6K+4}$$
$$\equiv 4-12\,[7]$$
$$\equiv -8\,[7]$$
$$\equiv 6\,[7]$$

Si $n=6K+4$ le reste de X_n par 7 est 6

* Si $r=5$ $\quad n=6K+5$

$$X_n = 2.5^{6K+5} - 3.3^{6K+5}$$
$$\equiv 6-15\,[7]$$
$$\equiv -9\,[7]$$
$$\equiv 6\,[7]$$

Si $n=6K+5$ le reste de X_n par 7 est 6

b) Montrons que

$X_{2015} - 5$ est divisible Par 7

$2015 = 6 \times 335 + 5$

$$X_{2015} = 2.6^{6.335+5} - 3.3^{6.335+5}$$
$$\equiv 6-15\,[7]$$
$$\equiv -9\,[7]$$
$$\equiv 5\,[7]$$

$$\boxed{X_{2015} - 5 \equiv 0\,[7]}$$

Donc $X_{2015} - 5$ est divisible Par 7.

Exercice 2 :

1) $P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (1+20i)z + 14 - 5i$

a) $P(i) = -i + 6 + 5i + i - 20 + 14 - 5i = 0$

$\boxed{P(i) = 0}$

Determinons les complexes a et b tels que : $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

T. H

	1	$-6-5i$	$1+20i$	$14-5i$
i	$\downarrow$	i	$-6i+4$	$-14+5i$
	1	$-6-4i$	$5+14i$	0

$\boxed{a = -6-4i}$ et $\boxed{b = 5+14i}$

donc $\boxed{P(z) = (z-i)(z^2 - (6+4i)z + 5 + 14i)}$

b) $P(z) = 0$

$\begin{cases} z - i = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = i} \\ \text{ou} \\ z^2 - (6+4i)z + 5 + 14i = 0 \end{cases}$

$\Delta = (6+4i)^2 - 4(5+14i)$

$= 36 + 48i - 16 - 20 - 56i$

$\Delta = -8i$

$\delta = \sqrt{\frac{0 + \sqrt{(-8)^2 + 0^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{0 + \sqrt{(-8)^2 + 0}}{2}}$

$\boxed{\delta = 2 - 2i}$

$z_1 = \frac{6+4i+2-2i}{2} = \boxed{4+i}$

$z_2 = \frac{6+4i-2+2i}{2} = \boxed{2+3i}$

$\boxed{S = \{i, 2+3i, 4+i\}}$

2) on pose $Z_A = i$, $Z_B = 4+i$, $Z_C = 2+3i$

$S : A \to A$

$B \to C$

a) $Z' = aZ + b$

on a $\begin{cases} Z_A = aZ_A + b \quad (1) \\ Z_C = aZ_B + b \quad (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow Z_A - Z_C = a(Z_A - Z_B)$

$\boxed{a = \frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B}}$

$a = \frac{i - 2 - 3i}{i - 4 - i} = \frac{-2-2i}{-4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$

dans (1) on a

$Z_A = aZ_A + b \Leftrightarrow \boxed{b = Z_A - aZ_A}$

$b = i - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(i) = i - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}$

$\boxed{b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$

alors $\boxed{Z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)Z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$

b) Determinons le rapport et l'angle S

* rapport $K = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

angle $\theta = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4}$

donc $S = \boxed{S\left(A, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}$

3. a) Determinons Γ_1

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \frac{z-i}{z-4-i}$ est imaginaire Pure

$\Leftrightarrow \frac{z-z_A}{z-z_B}$ est imaginaire Pure

$\Leftrightarrow$ Γ_1 est le cercle de diametre $[AB]$ Privé de A et B

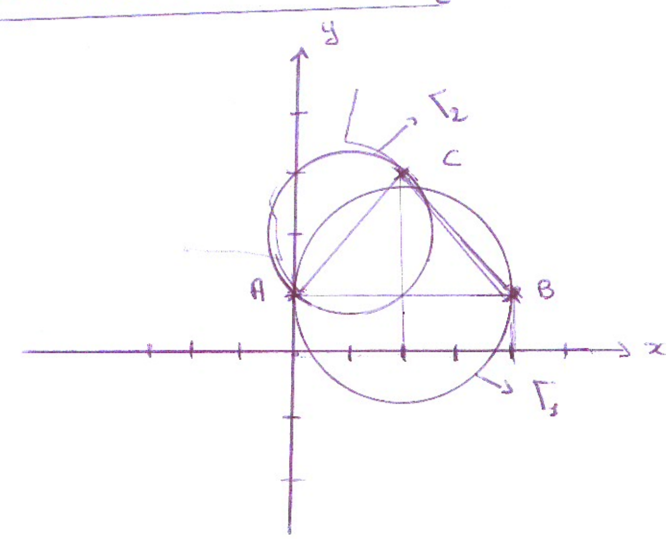
* Determinons Γ_2

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \frac{z-i}{z-2-3i}$ est imaginaire Pure

$\Leftrightarrow \frac{z-z_A}{z-z_C}$ est imaginaire Pure

$\Leftrightarrow$ Γ_2 est le cercle de diamètre $[AC]$ Privé de A et C

* Construction de Γ_1 et Γ_2



b) $S(\Gamma_1) \stackrel{?}{=} \Gamma_1$

Comme $S(A) = A$ et $S(B) = C$

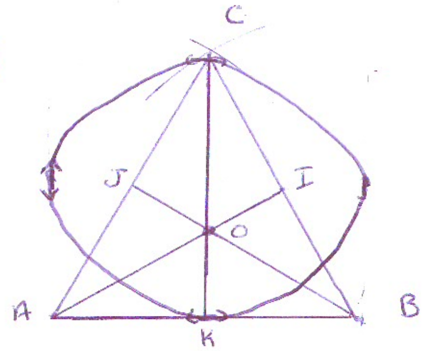
$\Gamma_{1[AB]} \xrightarrow{S} \Gamma_{[S(A)\,S(B)]} = \Gamma_{[AC]} = \Gamma_2$

Donc

$\boxed{S(\Gamma_1) = \Gamma_2}$.

Exercice 3 :

1. a)



b) M.q $\exists!$ r_1 telle que $r : B \to C$, $J \to K$

Comme (ABC) est équilatéral

$BJ = CK$ et $\vec{BJ} \neq \vec{CK}$

alors il existe une unique rotation telle que $r_1(B) = C$ et $r_1(J) = K$

Centre de r_1 :

Comme $med[BC] = med[JK]$

le centre est $\{O\}$.

angle de r_1 : α_1

$r_1(B) = C$

$r_1(J) = K$

$\Rightarrow \alpha_1 = (\vec{BJ}, \vec{CK}) = (\vec{OJ}, \vec{OK}) = \frac{2\pi}{3}$

donc $\boxed{r_1 = r(O, \frac{2\pi}{3})}$

c) Soit $r_2(B) = C$ et $r_2(K) = J$

Centre de r_2 : est $(BJ) \cap (CJ) = \{A\}$

car $med[BK] = med[CJ]$

angle de r_2 : $\alpha_2 = (\vec{BK}, \vec{CJ}) =$

$\alpha_2 = (\vec{IJ}, \vec{CK}) = (\vec{JI}, \vec{JC}) = \frac{\pi}{3}$

donc $\boxed{r_2 = r(A, \frac{\pi}{3})}$

2. a) Soit $f = r_1 \circ r_2$ et $g = r_2 \circ r_1$

* Caractérisons f

f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

alors f est une symétrie centrale

$f(A) = r_1 \circ r_2(A) = r_1(A) = B$

or

$K = A * B \Rightarrow \boxed{f = S_K}$

* Caractérisons g

g est la composée de deux rotation d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

alors g est une symétrie centrale

$g(C) = r_2 \circ r_1(C) = r_2(A) = A$

or $J = A * C$

$\Rightarrow \boxed{g = S_J}$

b) M.q $g \circ f = t_{\vec{BC}}$

$g \circ f = S_J \circ S_K = t_{2\vec{KJ}} = \boxed{t_{\vec{BC}}}$

(d'après le Théorème du milieu)

3.a) Montrons qu'il esciste une unique similitude directe S telle que $S(B)=I$ et $S(C)=J$

Comme $B \neq C$ et $I \neq J$

Alors il esciste une similitude direct S telle que $S : B \to I$
$C \to J$

* l'angle de S

$$\boxed{(\vec{BC}, \vec{IJ}) = (\vec{IC}, \vec{IJ}) = \frac{\pi}{3}}$$

rapport de S

Comme $S(B)=I$
$S(C)=J$

$$\boxed{K = \frac{IJ}{BC} = \frac{IJ}{AB} = \frac{IJ}{2IJ} = \frac{1}{2}}$$

b) Determinons $S(A)$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} S(A) \\ I \\ J \end{pmatrix}$$

équilatéral direct — équilatéral direct

or KIJ est équilatéral direct

donc

$$\boxed{S(A)=K}$$

* Determinons $S(O)$

$O = \text{bar}$

A	B	C
1	1	1

$\Rightarrow$

$S(O) = \text{bar}$

S(A)	S(B)	S(C)
1	1	1

$= \text{bar}$

K	I	J
1	1	1

$= O$

(Conservation du barycentre)

$$\boxed{S(O)=O}$$

c) $h = R(O, \frac{2\pi}{3}) \circ S(O, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3})$

$h = S(O, \frac{1}{2}, \pi) =$

$$\boxed{h(O, -\frac{1}{2})}$$

4) $M \in \Gamma \Leftrightarrow IM + JM = IC + JC = a$

a) M.q $K \in \Gamma$

$IK + JK = IC + JC = a \Rightarrow \boxed{K \in \Gamma}$

b)

- Centre Ω est le milieu $[IJ]$
- les sommets sur l'axe non focal sont K et C car $(KC) = \text{med}[IJ]$
- Sommets sur l'axe focal $(IJ) \cap \mathcal{C}(\Omega, \frac{a}{2})$

Exercice 4:

Soit $f(x)=\frac{x+1}{e^{x}}=(x+1)e^{-x}$

1. a) le tableau de variation

$D_f=]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x+1)e^{-x}\right)=-\infty+\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}\right)=0$

$f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -xe^{-x}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) Tracé de $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}\cap Ox$ $f(x)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

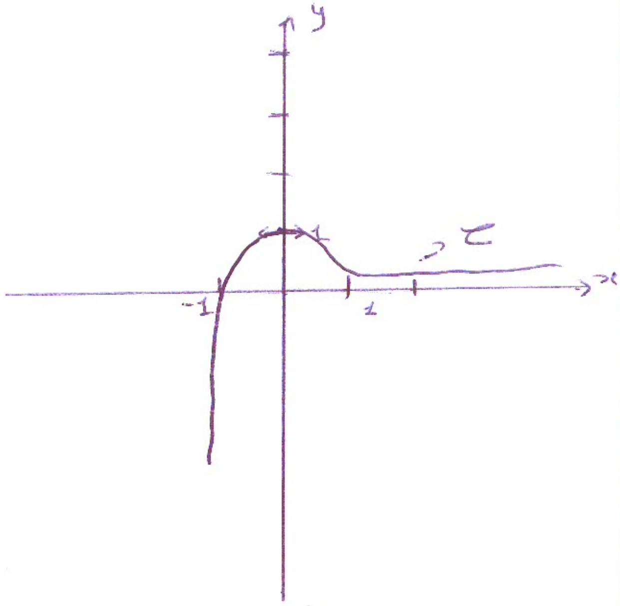
$A(-1,0)$

$\mathcal{C}\cap(Oy)$ $f(0)=1 \Rightarrow B(0,1)$

Branches infinies

- $y=0$ A.H au voisinage de $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\cdot e^{-x}\right)=+\infty$

$\mathcal{C}$ admet une B.P de direction (oy)



2) $\forall n\geq 1$ $f_n(x)=\frac{(1+x)^n}{e^{x}}=(1+x)^n e^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $F_n(x)=\int_{-1}^{x} f_n(t)\,dt$

M.q $\forall n\geq 1$ et $\forall x\in\mathbb{R}$

$F_{n+1}(x)=\int_{-1}^{x}(1+t)^{n+1}e^{-t}\,dt$

on pose $\begin{cases} U(t)=(1+t)^{n+1} \\ V'(t)=e^{-t}\end{cases}$ $\begin{cases} U'(t)=(n+1)(1+t)^{n} \\ V(t)=-e^{-t}\end{cases}$

$F_{n+1}(x)=\left[-(1+t)^{n+1}e^{-t}\right]_{-1}^{x}+(n+1)\int_{-1}^{x}\frac{(1+t)^n}{e^{t}}\,dt$

$$\boxed{F_{n+1}(x)=(n+1)F_n(x)-f_{n+1}(x)}$$

3) Soit $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^{0} g_n(t)\,dt$

a) Verifions que $\forall n \geq 1$

$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

de l'égalité

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - g_{n+1}(x)$

$F_{n+1}(0) = (n+1)F_n(0) - g_{n+1}(0)$

$= (n+1)I_n - 1$

donc $\forall n \geq 1$ $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n - 1}$

b) M.q la suite (I_n) est decroissant et positive.

$-1 \leq t \leq 0$

$0 \leq 1+t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1+t)^{n+1} \leq (1+t)^n$

$0 \leq (1+t)^{n+1} e^{-t} \leq (1+t)^n e^{-t}\,dt$

on intègre

$0 \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^{n+1} e^{-t}\,dt \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^{-t}\,dt$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

donc I_n est decroissante et positive.

c) M.q $\forall n \geq 1$ $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

d'une Part : $I_{n+1} \leq I_n$ car $(I_n) \searrow$

$(n+1)I_n - 1 \leq I_n$

$nI_n + I_n - I_n \leq 1$

$nI_n \leq 1$

$\Rightarrow \boxed{I_n \leq \frac{1}{n}}$ (1)

d'autre Part (I_n) est positive

$0 \leq I_{n+1}$

$0 \leq (n+1)I_n - 1$

$1 \leq (n+1)I_n \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n}$ (2)

donc de (1) et (2)

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}}$$

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

D'après Gauss $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

4) $\forall n \geq 1 \quad U_n = \frac{I_n}{n!}$

a) $U_{n+1} \overset{?}{=} U_n - \frac{1}{(n+1)!}$; $U_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}$

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)I_n - 1}{(n+1)!} = \frac{\cancel{(n+1)}I_n}{\cancel{(n+1)}!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$U_{n+1} = \frac{I_n}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}}$$

* Deduises que $U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

ona $U_1 = \frac{I_1}{1!} = I_1 = \int_{-1}^{0} (1+t)e^{-t}\,dt$

$$\begin{cases} U(t) = 1+t \\ V'(t) = +e^{-t} \end{cases} \quad \begin{cases} U'(t) = 1 \\ V(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

$$U_1 = [(1+t)e^{-t}]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-t}\,dt$$

$$U_1 = [-(1+t)e^{-t}]_{-1}^{0} + [-e^{-t}]_{-1}^{0}$$

$$U_1 = -1 - 1 + e$$

$$\boxed{U_1 = e - 2}$$

ona $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$, Alors

$n=1 \quad \cancel{U_2} = U_1 - \frac{1}{2!}$

$n=2 \quad \cancel{U_3} = \cancel{U_2} - \frac{1}{3!}$

$n=3 \quad \cancel{U_4} = \cancel{U_3} - \frac{1}{4!}$

$n-1 \quad U_n = \cancel{U_{n-1}} - \frac{1}{n!}$

$$U_n = U_1 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$U_n = e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$U_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$U_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \frac{1}{n!}\right)$$

$$\boxed{U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$$

* $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to+\infty} e - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} U_n}_{0}$$

alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$

Exercice 5:

Soit $f(x) = x\ln(x+1)$

1.a)

• $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x\ln(x+1)) = (-1)(-\infty)$
$= +\infty$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty}$

* $x = -1$ A.V au voisinage de $+\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x\ln(x+1)) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) Calculons $f'(x)$

$f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$

Justifier que $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \\ x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \end{cases}$

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
$\frac{x}{x+1}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	

c) T.V de f

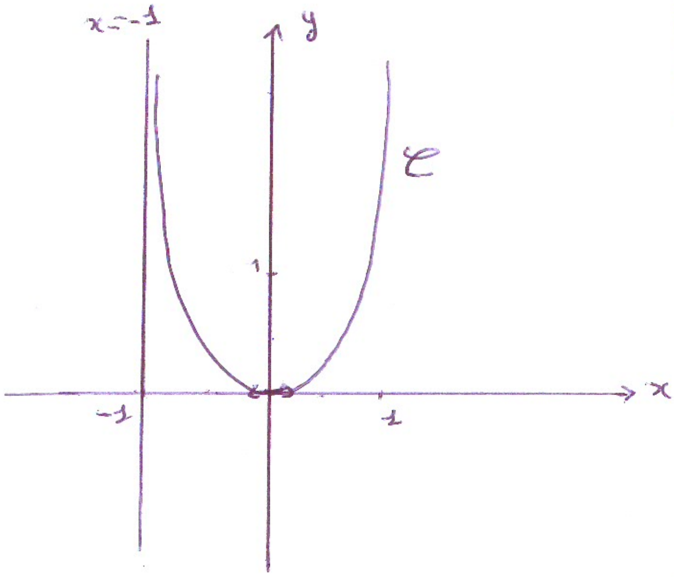
x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.a) Tracé de $\mathcal{C}$ de f

Branches infinies

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x}\ln(x+1)}{\cancel{x}} = +\infty$

$\mathcal{C}$ admet une B.P de direction (oy)



b) Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$

$\dfrac{x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[x\right]_0^1 + \left[\ln(1+x)\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{2} - 1 + \ln 2$

$\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \ln 2 - \frac{1}{2}}$

c) $A=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$

$$\begin{cases} u(x)=\ln(x+1) \\ v'(x)=x \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x+1} \\ v(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$A=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{(x+1)}\,dx$$

$$A=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$A=\cancel{\frac{\ln 2}{2}}-\cancel{\frac{\ln 2}{2}}+\frac{1}{4}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{4}\ \text{U.a}}$$

3) $\forall n\geq 1$ $U_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx$

a) $\forall x\in[0,1]$ $t\to t^n\ln(1+t)$ est continue produit de 2 fonction continues.

$$U_1=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=A=\frac{1}{4}$$

donc $\boxed{U_1=\frac{1}{4}}$

b) on a : $0\leq x\leq 1$

$1\leq(1+x)\leq 2$

$0\leq\ln(1+x)\leq\ln 2$

$0\leq x^n\ln(1+x)\leq x^n\ln 2$

$0\leq\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx\leq\ln 2\int_0^1 x^n\,dx$

$\Leftrightarrow 0\leq U_n\leq\ln 2\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$$\boxed{0\leq U_n\leq\frac{\ln 2}{n+1}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln 2}{n+1}=0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0}$

4) $\forall n\geq 2$ $\forall x\in[0,1]$ on pose

$$S_n(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-\dots+(-x)^n$$

a) on rappelle :

$$1+x+x^2+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$S_n(x)=1+(-x)^1+(-x)^2+(-x)^3+\dots+(-x)^n=\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}=\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

$$\boxed{S_n(x)=\frac{1}{1+x}-(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}}$$

b) $1-x+x^2+\dots+(-x)^n=\frac{1}{1+x}-(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$

on integre entre 0 et 1

$$\int_0^1 1-x+x^2+\dots+(-x)^n\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx-(-1)\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\left[\ln(1+x)\right]_0^1-(-1)\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\dots+\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx}$$

c) $U_n=\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$

on pose $\begin{cases} U(x)=\ln(1+x) \\ V'(x)=x^n \end{cases}$ $\begin{cases} U'(x)=\frac{1}{1+x} \\ V(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$

$$U_n=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$U_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

or $(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx=\ln 2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$

$$\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx=(-1)^{n+1}\left(\ln 2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right)$$

$$\boxed{U_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\ln 2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right)}$$

5) $V_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^n}{n+1}$

a) $0\le x\le 1$

$1\le 1+x\le 2 \iff \frac{1}{2}\le\frac{1}{1+x}\le 1$

$\frac{1}{2}x^{n+1}\le\frac{x^{n+1}}{1+x}\le x^{n+1}$

$$\int_0^1\frac{1}{2}x^{n+1}\,dx\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx\le\int_0^1 x^{n+1}\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2(n+2)}x^{n+2}\right]_0^1\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx\le\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$$

$$\boxed{\frac{1}{2(n+2)}\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx\le\frac{1}{n+2}}$$

b) on remarque

$$V_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

or $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$$V_n=\ln 2-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx=0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}V_n=\ln 2}$$

c) on a $0\le U_n\le\frac{\ln 2}{n+1}$

$$U_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$$

$$U_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}(\ln 2-V_n)$$

$$(n+1)U_n=\ln 2-(-1)^{n+1}[\ln 2-V_n]$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(n+1)U_n=\ln 2}$$

fin...