Meimouna Mint Amar / Bouhoubeiny
$7C_1$

Bac 2013 :

Session Normale :

Exercice 2 :

$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$

1-a) $P(4)$:

$4^3 - (9-i)\times 16 + 4(28-5i) - 32 + 4i$

$= 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i$

$= 0$

$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$

En utilisant le Tableau d'horner :

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-32+4i$
4	↓	4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$P(z) = (z-4)(z^2 + (-5+i)z + 8 - i)$

b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$

ou $z^2 + (-5+i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = (-5+i)^2 - 4\times 1(8-i)$

$= 25 - 10i - 1 - 32 + 4i$

$= -8 - 6i = (1-3i)^2$

$z_1 = \dfrac{5 - i + 1 - 3i}{2} = 3 - 2i$

$z_2 = \dfrac{5 - i - 1 + 3i}{2} = 2 + i$

$S = \{4 ; 3-2i ; 2+i\}$

2) $A(4)$; $B(2+i)$; $C(3-2i)$

a) $S : M(z) \longrightarrow M'(z')$

$z' = az + b \,/\, a, b \in \mathbb{C}$

$S : C \longrightarrow C \Rightarrow z_C = a z_C + b$ (1)

$S : A \longrightarrow B \Rightarrow z_B = a z_A + b$ (2)

(1) − (2) donne :

$z_C - z_B = a(z_C - z_A)$

$\Rightarrow a = \dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \dfrac{3 - 2i - 2 - i}{3 - 2i - 4}$

$= \dfrac{1 - 3i}{-1 - 2i} = \dfrac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4}$

$= \dfrac{5 + 5i}{5} = 1 + i$

$b = z_C - a z_C = (1-a) z_C$

$= (1 - 1 - i)(3 - 2i)$

$= -3i - 2$

Donc :

$S : M(z) \longrightarrow M'(z') \,/\, z' = (1+i)z - 2 - 3i$

b) le rapport : $k = |1+i| = \sqrt{2}$

l'angle $\theta = \operatorname{Arg}(1+i) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

3) $\varphi(z) = z^2-(5-i)z+8-i$

a) $\varphi(z) = (x+iy)^2-(5-i)(x+iy)+8-i$

$= x^2-y^2+2xyi-5x-5iy+xiy+8-i$

$\Leftrightarrow \varphi(z) = x^2-y^2-5x-y+8+$
$i(2xy-5y-x-1)$

$\Gamma = \{M \in P / \varphi(z)$ est imaginaire pur non nul$\}$

$\Longrightarrow Re(\varphi)(z) = 0$

$\Leftrightarrow x^2-y^2-5x-y+8=0$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{24}{4}+8=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

$\Leftrightarrow -\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(\sqrt{2})^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$; Γ a pour équation : $\frac{-X^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

D'où Γ est une hyperbole de centre Ω ~~et~~ de sommets :

$\Rightarrow$ $B(0, \sqrt{2})$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et $B'(0, -\sqrt{2})$ Mais dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a : $B\left(\frac{5}{2}, \sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ et $B'\left(\frac{5}{2} ; -\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$. Les asymptotes Δ et Δ' ont pour équations dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

$\Delta : Y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}X = X$ et

$\Delta' : Y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}X = -X$.

et Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a : $y+\frac{1}{2} = x-\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta : y = x-3$

et $y+\frac{1}{2} = -x+\frac{5}{2}$

$\Delta' : y = -x+2$