Meimouna Mint Amar / Bouhoubeiny

7C1

# Bac 2011 :

## Session Normale :

### Exercice 1 :

$P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$

où $\theta \in [0, 2\pi[$.

1-a) $P(1)$ :

$P(1) = 1^3 - (1+2\cos\theta)1^2 + (1+2\cos\theta)1 - 1$

$= 1 - 1 - 2\cos\theta + 1 + 2\cos\theta - 1$

$= 0$

| | 1 | $-1-2\cos\theta$ | $1+2\cos\theta$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ↓ | 1 | $-2\cos\theta$ | 1 |
| | 1 | $-2\cos\theta$ | 1 | 0 |

Alors : $P(z) = (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1)$

$P(z) = 0$ ; $(z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1) = 0$

soit $z = 1 \Rightarrow z_0 = 1 \in \mathbb{R}$.

où $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$

$\Delta = (-\cos)^2 - 1\times 1$

$= \cos^2\theta - 1$

$= -(1-\cos^2\theta) = (i\sin\theta)^2$

Donc : $z' = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} = \boxed{\cos\theta + i\sin\theta}$

$z'' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \boxed{\cos\theta - i\sin\theta}$

$i\sin\theta \geq 0$ ; $\text{Im}(z_1) \geq 0 \Rightarrow z_1 = z' = \cos\theta + i\sin\theta$

$\forall\ \theta \in [0, 2\pi[$

Donc l'ensemble de solution est :

$S = \{1, \cos\theta + i\sin\theta ; \cos\theta - i\sin\theta\}$

2) $z_0$, $z_1$ et $z_2$ affixes $M_0$, $M_1$ et $M_2$

Déterminons le lieux géometrique de $M_1$, $M_2$ lorsque $\theta$ décrit $[0, 2\pi[$ :

$M_1(x_{M_1}, y_{M_1}) \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = \cos\theta \\ y_{M_1} = \sin\theta \Rightarrow x^2_{M_1} + y^2_{M_1} = 1 \\ \theta \in [0, 2\pi[ \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $M_1$ décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

3) $G = \text{bar}$

| $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $-3$ |

$1+1-3 \neq 0$

a) le lieu géometrique du pt G :

Calculons $z_G$ l'affixe du point G :

$z_G = \frac{1\times z_0 + 1\times z_1 - 3\times z_2}{1+1-3} =$

$\frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta - 3(\cos\theta - i\sin\theta)}{1+1-3}$

$\boxed{z_G = -1 + 2\cos\theta - 4i\sin\theta}$

$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x+1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{4}y \end{cases} \theta \in [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{4}\right)^2 = 1$

Alors $\Gamma$ de G est une ellipse

ellipse d'équation :

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

b) $\Omega(-1,0)$ ; alors le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les coordonnées $(X,Y)$ de G vérifient :

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{16}=1 \quad \text{Car : } \begin{cases} X=x+1 \\ Y=y \end{cases}$$

Alors $\Gamma$ de G est l'ellipse dont l'équation réduite dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$

$$\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{4^2}=1$$ ; Comme $b=4>2=a$

Alors les éléments caractéristiques dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ sont :

- Le centre $\Omega(-1,0)$
- les sommets :

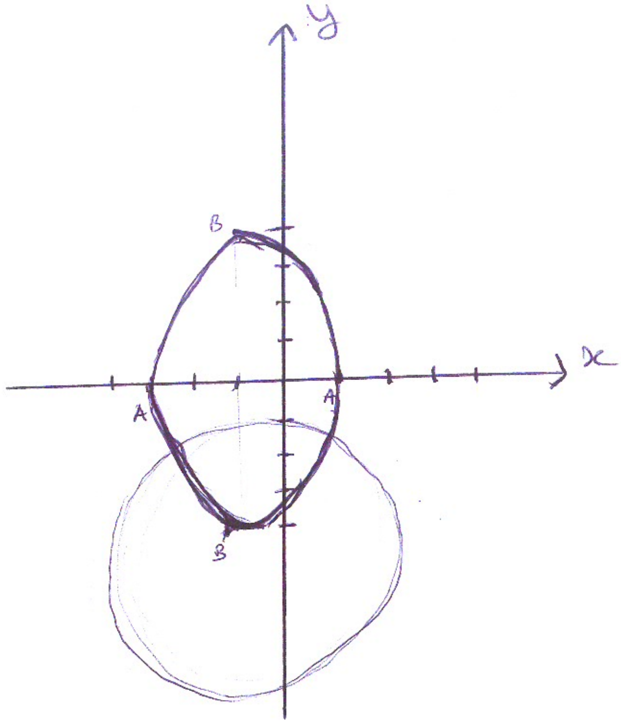
- Dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ les sommets sont : $A(2,0)$ ; $A'(-2,0)$, $B(0,4)$ $B'(0,-4)$

Or : $\begin{cases} X=x+1 \\ Y=y \end{cases}$

- Donc le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les sommets sont : $A(1,0)$, $A'(-3,0)$, $B(-1,4)$ $B'(-1,-4)$

- $C=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$
- L'excentricité : $e=\frac{c}{b}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Construction de $\Gamma$ :




4) a) si $\theta=\frac{\pi}{2}$ alors :

- $Z_0=1 \Leftrightarrow M_0(1,0)$
- $Z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow M_1(0,1)$
- $Z_2=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow M_2(0,-1)$

Alors $Z_G=-1+2\cos\frac{\pi}{2}-4i\sin\frac{\pi}{2}=$ $-1-4i \Rightarrow Z_G(-1,-4)$

G est le sommet de $\Gamma$ : $G=B'$.

b) $\Gamma'$ est l'ensemble de points M du plan tels que $MM_0^2+MM_1-3MM_2^2=6$

C'est la ligne de niveau 6 de la fonction scalaire de leibniz.

$\varphi(M)=MM_0^2+MM_1-3MM_2^2$.

associée au système $\{(M_0,1);(M_1,1)(M_2,-3)\}$ dont le barycentre est G.

Donc, par réduction d'écriture :

$M \in \Gamma' \Leftrightarrow -MG^2 + \varphi(G) = 6$

$\varphi(G) = GM_0^2 + GM_1^2 - 3GM_2^2$

$GM_0^2 = |z_0 - z_G|^2 = (-1-1)^2 + (-4-0)^2 = 20$

$GM_1^2 = |z_1 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (1+4)^2 = 26$

$GM_2^2 = |z_0 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (-1+4)^2 = 10$

Alors $\varphi(G) = 16$

Donc $M \in \Gamma' \Leftrightarrow MG^2 = 10$ d'où

$\Gamma'$ est le cercle de centre $G$

et de rayon $\sqrt{10} = GM_2$

$\Gamma'$ est le cercle de centre $G$

passant par $M_2$ car $GM_2^2 = 10$.