Meimouna Mint Amar / Bouhoubeiny
7C₁

Bac 2012 :
Session Normale :

Exercice 3 :

$\forall \theta \in [0, 2\pi] : E_\theta = z^2 - 6\cos\theta \, z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$

1) a) Resolvons l'equation E_θ :

$\Delta = 9\cos^2\theta - 4 - 5\cos^2\theta$

$= 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$

$= (2i\sin\theta)^2$ donc $\delta = 2i\sin\theta$

Les solutions sont :

$z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$

$z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$\forall \theta \in [0, \pi[$ $\sin\theta \geq 0$ donc

$\forall \theta \in [0, \pi[$ $\mathrm{Im}(z_1) \geq 0$.

b) E_θ admet des solutions doubles :

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \; ; \theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ où $\theta = \pi$; $z_{A_1} = 3$ et $z_{A_2} = -3$

• E_θ admet des solutions imaginaires pures $\Leftrightarrow \cos\theta = 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ où $\theta = \frac{3\pi}{2}$

dans ce cas $z_{B_1} = 2i$; $z_{B_2} = -2i$

2) $z_{M_1} = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$; $z_{M_2} = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$$\begin{cases} x_{M_1} = 3\cos\theta \\ y_{M_1} = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x_{M_1}}{3}\right)^2 = \cos^2\theta \\ \left(\frac{y_{M_1}}{2}\right)^2 = \sin^2\theta \end{cases}$$

donc : $\frac{x_{M_1}^2}{3^2} + \frac{y_{M_1}^2}{2^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

demême : $\frac{x_{M_2}^2}{3^2} + \frac{y_{M_2}^2}{2^2} = 1$

donc M_1 et M_2 appartiennent le même ellipse d'equation : $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

donc Γ est une ellipse de centre O et d'equation Cartesienne :

$$\boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1}$$

b) Γ est une ellipse de centre O et des sommets :

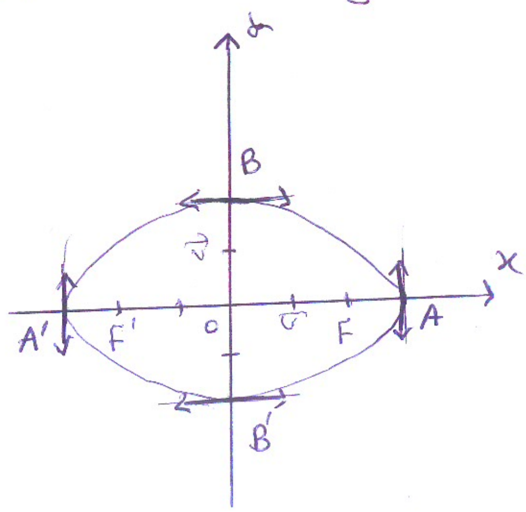
$A(3,0)$; $A'(-3,0)$; $B(0,2)$; $B'(0,-2)$

et de Foyer $F(\sqrt{5},0)$ $F'(-\sqrt{5},0)$

d'axe focal $(O, \vec{i})$ de directrices

$D : x = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $D' : x = \frac{-9}{\sqrt{5}}$ et

d'excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



3) $f(M) = M' \Leftrightarrow M' = bar$

A_1	B_1	M
-4	2	3

$$z' = \frac{-4 z_{A_1} + 2 z_{B_1} + 3z}{-4+2+3}$$

$$= \frac{-4\times 3 + 2\times 2i + 3z}{1}$$

donc $z' = 3z - 12 + 4i$

$a = 3 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $z = az + b$

donc f est une homothétie de rapport $K = 3$ et de centre Ω d'affixe : $z_\Omega = \frac{-12+4i}{1-3} = 6-2i$

b) $\Gamma' = f(\Gamma)$

$M(x';y') \in \Gamma'$, $(M(x;y) \in \Gamma$

tel que $f(M) = M'$

$\Leftrightarrow x' + iy' = 3(x+iy) - 12 + 4i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 12 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x+12}{3} \\ y = \frac{y'-4}{3} \end{cases}$$

d'aprés 2 - a)

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x'+12)^2}{9^2} + \frac{(y'-4)^2}{6^2} = 1$$

donc l'equation Cartésienne de Γ' est :

$$\boxed{\frac{(x'+12)}{9^2} + \frac{(y'-4)}{6^2} = 1}$$