Meimouna Mint Amar / Bouhoubeiny

$7C_1$

Bac 2014 :
Session Normale :

Exercice 1 :

$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$

1) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$P(2i) = 0$

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \iff (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\iff z - 2i = 0$ où $z^2 + z + 1 = 0$

$z = 2i$ $\quad \Delta = 1 - 4 = -3$

$\Rightarrow 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$Im(2i) \geq Im\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a) on a : $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x, y)$

$M \in (BC) \iff \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\iff -\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \iff x + \frac{1}{2} = 0$

$\iff 2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\iff z = -\frac{1}{2} + iy \,/\, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Or : $z' = \frac{1}{z^2 + z + 1} = \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

D'où : $z' = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + iy + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$.

Donc M' est sur l'axe des abscisses.

3) a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$

d'où $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + 1 + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

b) Si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc : $f(z) = \dfrac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathcal{E}(O,1) \setminus \{B, C\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$$

D'où : $x'^2 + y'^2 = (2x'-1)^2$

b) $\Gamma : x^2 + y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$3x^2 - 4x - y^2 = -1$

$3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) - y^2 = -1$

$3\left[\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9}\right] - y^2 = -1$

$3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

$\Gamma : \dfrac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$

$\Gamma = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ et de sommets :

$S_1 : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}, 0\right) = (1, 0)$ et

$S_2 : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité

$e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$