oumou selemeta / seyid

corrigée Bac 2012 : S.N :

Exercice 03 : $\forall \theta \in [0, 2\pi[$

$E_\theta : z^2 - 6\cos\theta\, z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$

1) a) Résolvons l'équation E_θ :

$\Delta' = 9\cos^2\theta - 4 - 5\cos^2\theta$

$= 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$

$= (2i\sin\theta)^2$ donc $\delta = 2i\sin\theta$

Les solutions sont $z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$

$z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$\forall \theta \in [0, \pi[$ $\sin\theta \geq 0$ donc $\forall \theta \in [0, \pi[$

$Im(z_1) \geq 0$

b) • E_θ admet des solutions doubles

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$; $\theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

dans ce cas $z_{A_1} = 3$ et $z_{A_2} = -3$

• E_θ admet des solutions imaginaires pures $\Leftrightarrow \cos\theta = 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$

dans ce cas $z_{B_1} = 2i$, $z_{B_2} = -2i$

2)

$z_{M_1} = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$;

$z_{M_2} = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$$\begin{cases} x_{M_1} = 3\cos\theta \\ y_{M_1} = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x_{M_1}}{3}\right)^2 = \cos^2\theta \\ \left(\frac{y_{M_1}}{2}\right)^2 = \sin^2\theta \end{cases}$$

donc

$$\frac{x^2_{M_1}}{3^2} + \frac{y^2_{M_1}}{2^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

de même $\frac{x^2_{M_2}}{3^2} + \frac{y^2_{M_2}}{2^2} = 1$

donc M_1 et M_2 appartiennent la même ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

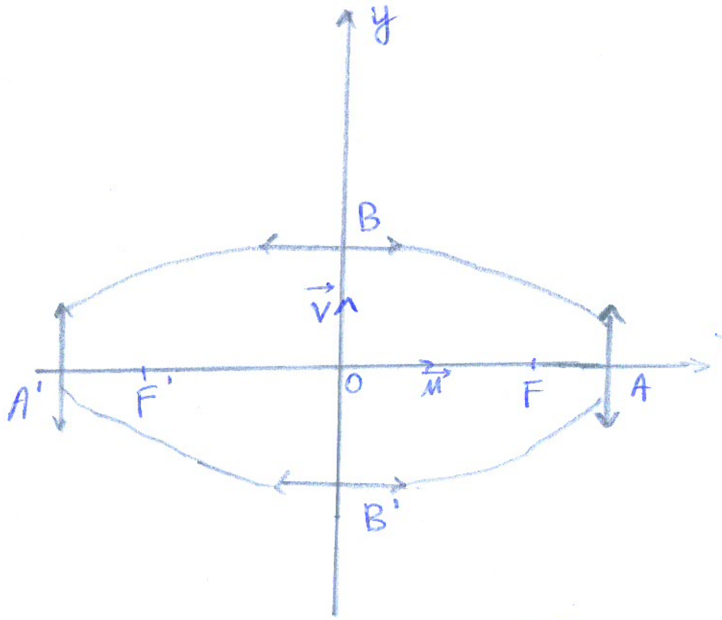
donc Γ est une ellipse de centre O et d'équation cartesienne

$$\boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1}$$

b) Γ est une ellipse de centre O et des sommets $A(3,0)$, $A'(-3,0)$; $B(0,2)$; $B'(0,-2)$ et de foyers $F(\sqrt{5},0)$; $F'(-\sqrt{5},0)$ d'axe focal $(O, \vec{i})$ de directices

$D : x = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $D' : x = \frac{-9}{\sqrt{5}}$

et d'excentricité : $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$



3) $f(M) = M' \Leftrightarrow M' = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A' & B' & M \\ -4 & 2 & 3 \end{array}$

$$z' = \frac{-4z_{A_1} + 2z_{B_1} + 3z}{-4+2+3}$$

$$= \frac{-4\times 3 + 2\times 2i + 3z}{1}$$

donc $z' = 3z - 12 + 4i$

$a, 3 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $z = az + b$

donc f est une homothetie de rapport $k=3$ et de centre ω d'affixe

$$z_\omega = \frac{-12+4i}{1-3} = 6-2i$$

b) $\Gamma' = f(\Gamma)$

$M(x',y') \in \Gamma'$, $M(x,y) \in \Gamma$ telque $f(M) = M'$

$\Leftrightarrow x' + iy' = 3(x+iy) - 12 + 4i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 12 \\ y' = 3y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 12 \\ y = \dfrac{y'-4}{3} \end{cases}$$

d'aprés 2-a

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x'+12)^2}{9^2} + \frac{(y'-4)^2}{6^2} = 1$$

donc l'équation cartesienne de Γ' est

$$\frac{(x'+12)}{9^2} + \frac{(y'-4)}{6^2} = 1$$