oumou selemeta / seyid

corrigés BAC 2011 : S. N :

Exercice 1 :

pour tout nombre complexe z on a : $p(z)=z^3-(1+2\cos\theta)z^2+(1+2\cos\theta)z-1$

$\theta\in[0;2\pi[$.

1-a) calcul de $p(1)$:

$p(1)=1^3-(1+2\cos\theta)\times1^2+(1+2\cos\theta)\times1-1$

$=1-1-2\cos\theta+1+2\cos\theta-1$

$=0$

• pour résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z)=0$, on factorise $p(z)$ et pour cela peut utiliser la division euclidienne, une identification, ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme p

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Alors pour tout nombre complexe z on a : $p(z)=(z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)$

$p(z)=0\Leftrightarrow(z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)=0$

Soit $z-1=0\Rightarrow z_0=1\in\mathbb{R}$

ou $z^2-2\cos\theta z+1=0$

Résolvons l'équation : $z^2-2\cos\theta z+1=0$

$\Delta'=(-\cos)^2-1\times1$

$=\cos^2\theta-1$

$=-(1-\cos^2\theta)$

$=(i\sin\theta)^2$

Donc $z'=\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{1}=\cos\theta+i\sin\theta$

$z''=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{1}=\cos\theta-i\sin\theta$

Si $\sin\theta\geq0$, $Im(z_1)\geq0\Rightarrow z_1=z'=\cos\theta+i\sin\theta$ si $\theta\in[0,2\pi[$

Alors : $z_2=\cos\theta-i\sin\theta$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $p(z)=0$ dans $\mathbb{C}$ est :

$S=\{1;\cos\theta+i\sin\theta;\cos\theta-i\sin\theta\}$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les nombres z_0 ; z_1 et z_2 sont les affixes respectives de M_0, M_1 et M_2
Déterminer les lieux géométriques de M_1, M_2 lorsque θ décrit $[0, 2\pi[$

$$M_1(x_{M_1} ; y_{M_1}) \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = \cos\theta \\ y_{M_1} = \sin\theta \Leftrightarrow x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 = 1 \\ \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

$\Leftrightarrow M_1$ Décrit le cercle de centre O et de rayon 1

Autrement :

$OM_1 = |z_1 - 0| = |e^{i\theta}| = 1, \ \theta \in]0 ; 2\pi[$

Donc M_1 décrit le cercle de centre O et de rayon 1

De même pour M_2 : M_2 décrit le cercle de centre O et de rayon 1

3)

$G = \text{bar}$

M_0	M_1	M_2
1	1	-3

$1 + 1 - 3 \neq 0$

a) Le lieu géométrique du point G :
calculons z_G l'affixe du point G :

$$z_G = \frac{1 \times z_0 + 1 \times z_1 - 3z_2}{1+1-3} = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta - 3(\cos\theta - i\sin\theta)}{1+1-3}$$

$$\boxed{z_G = -1 + 2\cos\theta - 4i\sin\theta}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x+1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{4}y \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

Alors le lieu géométrique Γ et G est l'ellipse d'équation
$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

b) Soient (x, y) les coordonnées de G dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et considérons le point $\omega(-1, 0)$; alors dans le repère $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ les coordonnée (x, y) de G vérifient : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ car

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ y = y \end{cases}$$

Alors le lieu géométrique Γ de G est l'ellipse dont l'équation réduite dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ $\dfrac{X^2}{2^2} + \dfrac{Y^2}{4^2} = 1$

comme $b = 4 > 2 = a$, alors les éléments caractéristiques (dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sont :

- Le centre $\Omega(-1, 0)$
- Les sommets :

– Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ les sommets sont $A(2,0)$; $A'(-2,0)$, $B(0,4)$ et $B'(0,-4)$

or $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$

– Donc dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les sommets sont $A(1,0)$, $A'(-3,0)$, $B(-1,4)$ et $B'(-1,-4)$

- $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$
- L'excentricité : $e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ construction de Γ

4)

a) si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors

- $z_0 = 1 \Leftrightarrow M_0(1,0)$
- $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow M_1(0,1)$
- $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{2} - i\sin\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow M_2(0,-1)$;

Alors $z_G = -1 + 2\cos\dfrac{\pi}{2} - 4i\sin\dfrac{\pi}{2} = -1 - 4i \Rightarrow G(-1,-4)$

En particulier, G est un sommet de Γ : $G = B'$.

b) Γ est l'ensemble de points M du plan tels que $MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2 = 6$ c'est la ligne de niveau 6 de la fonction scalaire de Leibniz

$\varphi(M) = MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2$ associée au système $\{(M_0, 1), (M_1, 1), (M_2, -3)\}$

dont le barycentre est G. Donc, par réduction d'écriture :

$M \in \Gamma \Leftrightarrow -MG^2 + \varphi(G) = 6$

$\varphi(G) = GM_0^2 + GM_1^2 - 3GM_2^2$

$GM_0^2 = |z_0 - z_G|^2 = (-1-1)^2 + (-4-0)^2 = 20$

$GM_1^2 = |z_1 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (1+4)^2 = 26$

$GM_2^2 = |z_0 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (-1+4)^2 = 10$

Alors $\varphi(G) = 16$

Donc $M \in \Gamma' \Leftrightarrow MG^2 = 10$ d'où Γ' est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{10} = GM_2$

Γ' est le cercle de centre G passant par M_2 car $GM_2^2 = 10$.

Autre méthode

$\varphi(M_2) = M_2M_0^2 + M_2M_1^2 - 3M_2M_2^2$

$= ((1-0)^2 + (0+1)^2) + ((0-0)^2 + (1+1)^2) + 0 = 6$

Alors $M_2 \in \Gamma'$. Donc $\Gamma' \neq \{\ \}$ et $\Gamma' \neq \{G\}$. par suite Γ' est le cercle de centre G passant par M_2.