Bac 2014 S.N
Meni Dahane
7C

Exo 1:

1) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$\therefore P(2i) = 0$

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \iff (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\iff z - 2i = 0 \iff z = 2i$

ou

$z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$S\left\{2i\,;\, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\,;\, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$Im(2i) \geq Im\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$

$z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a) On a : $B\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x\,;y)$

$M \in (BC) \iff \det(\vec{BM}\,;\vec{BC}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\iff -\sqrt{3}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = 0 \iff x + \dfrac{1}{2} = 0$

$2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B\,;C\}$

$\iff z = -\dfrac{1}{2} + iy \,/\, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

or : $z' = \dfrac{1}{z^2+z+1} = \dfrac{1}{(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

D'où : $z' = \dfrac{1}{(-\cancel{\frac{1}{2}} + iy + \cancel{\frac{1}{2}})^2 + \frac{3}{4}}$

$= \dfrac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

$= \dfrac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$

3) a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z + 1} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \dfrac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors

$|z|^2 = 1$

suite Exo1

d'où $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

b) Si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$

$|z| = 1$

Donc : $f(z) = \dfrac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$

$= \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathscr{C}_{(O;1)} \setminus \{B_1\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$

et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$z' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$

$x'^2 + y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2}$

et

$(2x'-1)^2 = \left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2}$

D'où : $x'^2 + y'^2 = (2x'-1)^2$

b) $\Gamma = x^2+y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}\right]-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-\frac{2}{3})^2}{\frac{1}{9}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

$\Gamma : \dfrac{(x-\frac{2}{3})^2}{(\frac{1}{3})^2}$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3};0\right)$ et de sommets $S_1 : \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3};0\right) = \left(\frac{1}{3};0\right)$ et $S_2 : \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3};0\right) = \left(\frac{1}{3};0\right)$ dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ et d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

$e = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$

$\boxed{e = 2}$