Nom : mariême / mouhamed yehdhih.
N° : 1011
Classe : 7° C

Bac : 2014

S.N :

Exercice 1 :

1°) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$\therefore P(2i) = 0$

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\therefore \forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$\Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \left\{2i, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$\mathrm{Im}(2i) \geq \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$, $z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

a) on a : $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x,y)$

$M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\vec{BM}, \vec{BC}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2x+1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + iy \;/\; y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

or : $z' = \dfrac{1}{z^2+z+1} = \dfrac{1}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

D'où :

$$z' = \frac{1}{(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{-y^2+\frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$$

Donc M' est sur l'axe des abscisses

3°: a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}z^2+\bar{z}z+\bar{z}}$

$= \dfrac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z+\bar{z}z+\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2 \times z+|z^2|+\bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z^2| = 1$

d'où : $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

b) si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc $f(z) = \dfrac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4°: a) $M \in \mathcal{C}(O,1) \setminus \{B, C\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$

et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta}-1\right)^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$$

D'où : $x'^2+y'^2 = (2x'-1)^2$

b) $\Gamma : x^2+y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}\right]-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-y^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-\frac{2}{3})^2}{1/9} - \dfrac{y^2}{1/3} = 1$

b) $\Gamma : \dfrac{(x-2/3)^2}{(1/3)^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{3}/3)^2} = 1$

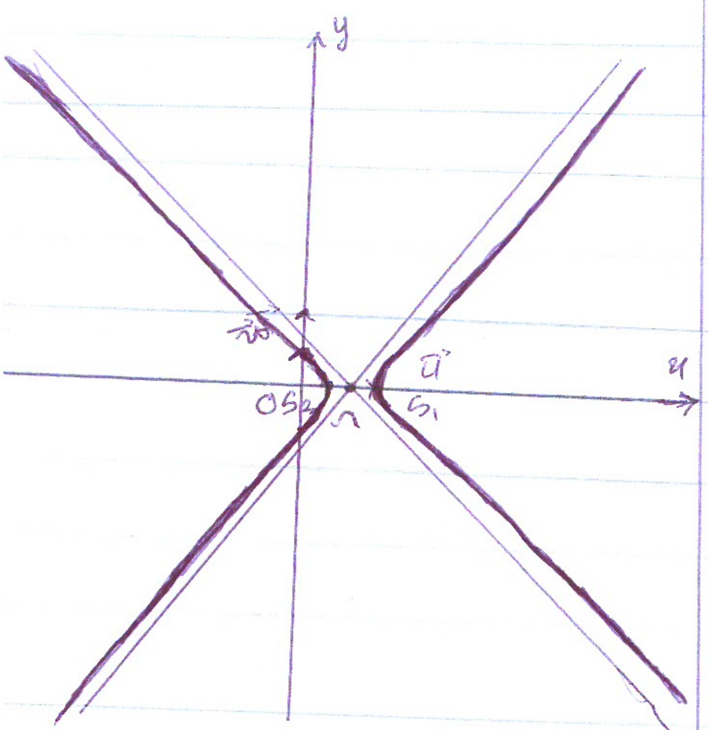
$\therefore \Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = 1/3$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ et de sommets

$S_1 : \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}, 0\right) = (1, 0)$ et

$S_2 : \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité

$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{2/3}{1/3} = 2$



Exercice 2 :

1°- a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} xe^x = +\infty$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

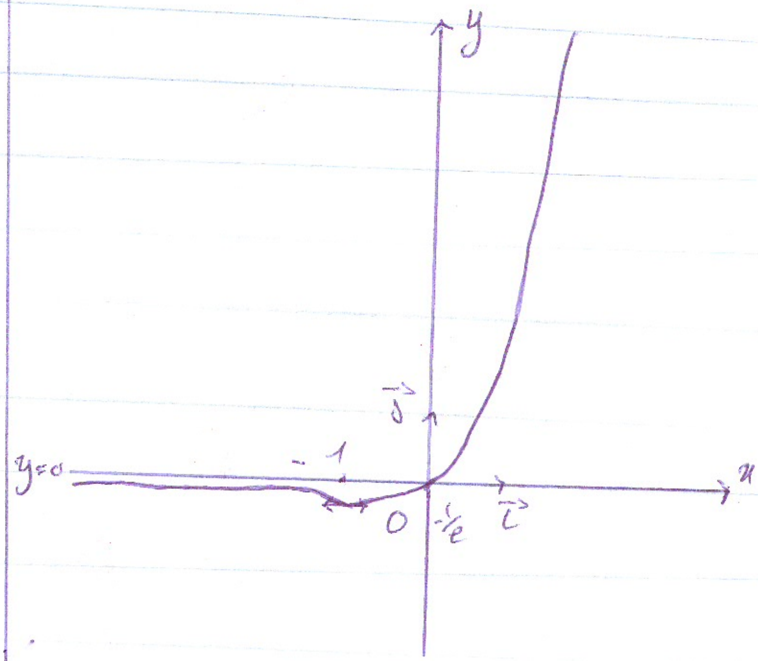
b) * $y = 0$: A.H. (C) au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

(C) admet une B.P // $(y'y)$ au voisinage de $+\infty$

* $\mathcal{C} \cap (y'y) : (0,0)$

* $\mathcal{C} \cap (x'x) : (0,0)$



c) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x$

$= (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc : f est une solution de l'équation différentielle

$y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

or : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

D'où : $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$$\mathcal{A} = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$
$$= [(x-1)e^x]_0^1$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 1}$$

2°. a) $I_1 = (-1)^2 \int_0^1 xe^x\,dx$

or : $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$

D'où : $\boxed{I_1 = -1}$

) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

Donc : $|I_n| = |(-1)^n| \int_0^1 x^n e^x\,dx$
$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

r : $\forall x \in [0,1]$, $x^n e^x \geq 0$

D'où : $\int_0^1 x^n e^x\,dx \geq 0$

Donc : $\left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e \cdot x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leq e \cdot \int_0^1 x^n\,dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}}$$

or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim \frac{e}{n+1} = 0$

D'où : d'après le T. G $\lim\limits_{n \to +\infty} |I_n| = 0$.

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 x^{n+1} e^x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \left\{ [x^{n+1} e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx \right.$
$= (-1)^{n+1} (e - 0 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x\,dx$
$= (-1)^{n+1} \cdot e - (-1)^{n+1} (n+1) \int_0^1 x^n e^x\,dx$
$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^n (n+1) \int_0^1 x^n e^x\,dx$
$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n,\ \forall n \geq 1}$$

3°) a) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)e^x}{x+1}\,dx$

	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	6
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$J = \int_0^1 \frac{(x^2+3x-6)(x+1)e^x}{(x+1)}dx$$

$$= \int_0^1 (x^2+3x-6)e^x dx$$

$$= \int_0^1 x^2e^x dx + 3\int_0^1 xe^x dx - 6\int_0^1 e^x dx$$

$$= (-1)^2\int_0^1 x^2e^x dx - 3\times(-1)\int_0^1 xe^x dx$$

$$= (-1)^2\int_0^1 x^2e^x dx - 3\times(-1)\int_0^1 xe^x dx - 6\,[e^x]_0^1$$

$$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$$

or : $I_1 = -1$ et $I_2 = (-1)^2 e + 2I_1 = e - 2$

D'où : $J = (e-2) - 3\times(-1) - 6(e-1)$

$$= e - 2 + 3 - 6e + 6$$

$$\therefore \boxed{J = 7 - 5e}$$

Exercice 3 :

1°. a) on a : $f(0) = 0$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(x\ln(x+1) - x\ln x)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où : f est continue à droite en 0

) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

f n'est pas donc dérivable à droite en 0 et la courbe $\mathcal{C}$ de f admet au point d'abscisse, une demi-tangente verticale.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{x}\,\overset{0}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ **F.I**

on pose $t = 1/x$

Alors $\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0^+$ et

$x = \frac{1}{t}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

Donc : $y = 1$: A.H à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2°. a) $\forall x > 0$, $f(x) = x\ln(1+1/x)$

à $f'(x) = \ln(1+1/x) + x\left(\frac{-1/x^2}{1+1/x}\right)$

$$= \ln(1+1/x) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \ln(1+1/x) - \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore f''(x) = \frac{-1/x^2}{1+1/x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

~~$= -1$~~

$$= \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

$$\therefore \boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$$

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$

Donc f' est ↘ sur $]0,+\infty[$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim \left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right)$

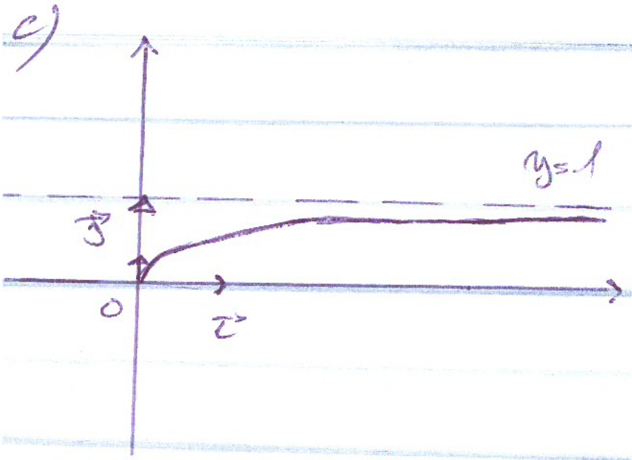
$= 0 - 0 = 0$

D'où : $\forall x > 0 , f'(x) > 0$

b) T.V de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	0 ↗	1

c)



2°. a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$.

Montrons que f_n est continue sur $[0,1]$

- Sur $]0,1]$, $f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonctions $x \longrightarrow x^n$ et $x \longrightarrow \ln(1+\frac{1}{x})$ continues sur $]0,1]$ d'où f_n est continue sur $]0,1]$.

- Etudions la continuité de f_n à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(1+\frac{1}{x})$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^n(\ln(x+1) - \ln x)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (x^n \ln(x+1) - x^n \ln x) = 0 - 0 = 0$

$= f_n(0)$.

D'où f_n est continue à droite en 0

Donc : f_n est continue sur $[0,1]$ et l'integrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette écriture definit une suite numérique.

b) D'après T.V de la fonction definie dans la question (1) on a :

$\forall x \geq 0 , \quad 0 \leq f(x) < 1$

D'où : en multipliant par x^{n-1} on a : $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

or : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

D'où : $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\forall n \geq 1 , \quad 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$

or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où : d'après le T.G $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$

4°. a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x \, dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$\therefore I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln \alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$

$\therefore I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln \alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$

) $\lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln \alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1} (\alpha \ln \alpha) - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 0 - 0 \times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\boxed{\therefore \lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}}$$

) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) \, dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} u'(x) = (n+1) x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on obtient $v(x)$ en utilisant une I.P.P

$\therefore J_{n+1} = \left[x^{n+1}\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n \left((x+1)\ln(x+1) - x\right)$

$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1} + x^n)\ln(x+1) \, d$
$+ (n+1)\int_0^1 x^{n+1} \, dx$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1) + x^n \ln(x+$
$+ (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1} \ln x \, dx + \int_0^1 x^n \ln(\right.$
$+ (n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1} + J_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$

$\therefore J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1) J_{n+1} - (n+1) J_n - \frac{1}{n+2}$

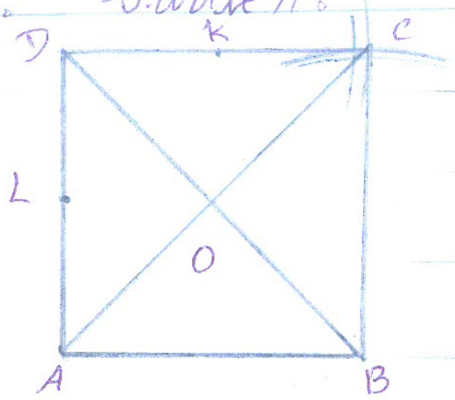
$\therefore J_{n+1} + (n+1) J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1) J_n$

$\therefore (n+2) J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1) J_n$

$\therefore J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} J_n$

Exercice 4 : **Partie A :**

1°)



2°) Comme $BL^2 = BA^2 + AL^2$

$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

et $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Donc $BL = AK \neq 0$

D'autre part :

$(\vec{AK}, \vec{BL}) \neq 0 \ [2\pi]$

Donc : il existe une unique rotat°

r qui transforme A en B et K en L.

Et comme méd $[AB] = (OK)$ et

méd $[KL] = (BD)$

et $(OK) \cap (BD) = \{O\}$,

Le centre de r est donc le point O.

Un angle de r est $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

3°) a) Comme $D \neq B$ et $L \neq O$,

Il existe donc une unique similitude

directe f_1 qui transforme D en L

et B en O.

Le rapport de f_1 est :

$\frac{OL}{BD} = \frac{a/2}{a/\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Et un angle de f_1 est :

$(\vec{BD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

b) Comme $f_1(P) = P$ et $f_1(B) = O$

on a donc : $(\vec{PB}, \vec{PO}) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

or : $(\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

D'où : $(\vec{PB}, \vec{PO}) = (\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4} \ (\neq 0 \ [\pi])$

Donc le point P appartient cercle circonscrit au triangle OAB c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre [AB].

De même : comme $f_1(P) = P$ et $f_1(D) = L$

on a : $(\vec{PD}, \vec{PL}) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

D'où : $(\vec{PO}, \vec{PL}) = (\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4} \ (\neq [\pi])$

Donc : le point P appartient au cercle circonscrit au triangel ODL c'est-à-dire que P appartiant au cercle de diamètre [OD].

On constante que le point O est commun aux cercles de diamètres [AB] et [OD] mais qu'il n'est pas le centre de f_1 (car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$);

le point P est donc le second point commun à ces deux cercles (autre que O)

3°: b) Montrons que P est le point d'intersection de (BL) et (AK).

$(\vec{PB}, \vec{PL}) = (\vec{PB}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PL})$

$= (\vec{AB}, \vec{AO}) + (\vec{DO}, \vec{DL}) \ [\pi]$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 \ [\pi]$

Donc : $P \in (BL)$

De même :

$(\vec{PA}, \vec{PK}) = (\vec{PA}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PK})$

$= (\vec{BA}, \vec{BO}) + (\vec{DO}, \vec{DK}) \ [\pi]$

$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0 \ [\pi]$

Donc : $P \in (AK)$

P est donc le point d'intersection de (BL) et (AK).

4°) Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$.

un angle de f_2 est :

$(\vec{BO}, \vec{DL}) = (\vec{BD}, \vec{DB}) + (\vec{DB}, \vec{DL})$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \ [2\pi]$

et le rapport de f_2 est :

$\frac{DL}{BO} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont deux similitudes directes de même rapport et de même angle et transforment le point B en au même point L (car $f_2 \circ f_1(B) = f_2(f_1(B)) = f_2(O) = L$ et $f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$).

Donc $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$

Le centre de f_2 est donc celui de f_1 c'est-à-dire le point P.

5°: a) $h = f_1 \circ f_2$ est la composée de deux similitudes directes dont le produit des rapports est $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \ (\neq 1)$ et dont la somme des angles est $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi \ [2\pi]$ et ayant même centre P d'où h est une homothétie de centre et de rapport $-\frac{1}{4}$

or : $h(B) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$

D'où : $\vec{PL} = -\frac{1}{4}\vec{PB}$

Donc : $4\vec{PL} + \vec{PB} = \vec{0}$

D'où : $P = \text{bar} \begin{vmatrix} B & L \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

b) $P = \text{bar} \begin{vmatrix} B & L \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow P = \text{bar} \begin{vmatrix} B & D & A \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

or : $B = \text{bar} \begin{vmatrix} A & C & D \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

D'où : $P = \text{bar} \begin{vmatrix} A & C & D & D & A \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow P = \text{bar} \begin{vmatrix} A & C & D \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \boxed{P = \text{bar} \begin{vmatrix} A & K \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}$

Partie B :

1) $r = S_1 \circ S_2$ est composé de deux réflexions de plans perpendiculaires dont la droite d'intersection est (AD).

D'où : r est le demi-tour d'axe (AD).

2) $t = S_3 \circ S_4$ est composée de deux réflexions de plans parallèles

D'où t est une translation.

Le vecteur de t est : $2\vec{DA}$.

3) $f = r \circ t$ est composée d'une translation et d'une ~~de~~ vecteur vecteur directeur de l'axe de la rotation.

D'où : f est le vissage d'axe (DA), d'angle π ~~de~~ et de vecteur $2\vec{DA}$.

Fin.