Baccalauréat 2014

Session Normale

Corrigé du sujet

Exercice 1 :

on pose :

$P(z) = z^3+(1-2i)z^2+(1-2i)z-2i$

1)

$P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2+(1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= \cancel{-8i} \cancel{-4} + \cancel{8i} + \cancel{2i} + \cancel{4} \cancel{-2i}$

$\boxed{P(2i) = 0}$

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C};\ P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2+z+1 = 0$

$\Delta = 1-4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$\boxed{\Delta = (i\sqrt{3})^2}$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{z' = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{z'' = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right.$

$I_m(2i) \geq I_m\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq I_m\left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right.$

$z_0 = 2i ; z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{}}{2}$

2) a) On a : $B\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et
$C\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x,y)$

$M\in(BC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=0$$

$$2x+1=0$$

b) $M\in(BC)\setminus\{B,C\}$

$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+iy \,/\, y\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

or : $z'=\dfrac{1}{z^2+z+1}=\dfrac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}$$

$$z'=\frac{1}{(iy)^2+\frac{3}{4}}$$

Donc M' est sur l'axe des abscisses.

3) a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}$

$$=\frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2+\bar{z}z+\bar{z}}$$

$$=\frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z+\bar{z}z+\bar{z}}$$

$$=\frac{\bar{z}}{|z|^2\times z+|z|^2+\bar{z}}$$

$$=\frac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}}$$

Car si $|z|=1$ alors $\bar{z}=e^{-i\theta}$ et $|z|=1$

donc :

$$f(z)=\frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$$

b) si $z=e^{i\theta}$ alors $\bar{z}=e^{-i\theta}$ et $|z|=1$

Donc $f(z)=\dfrac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$

$$f(z)=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$$

4) a)

$M \in \mathcal{C}(O,1) \setminus \{A;C\} \Rightarrow$

$Z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow Z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} \\ (2x'-1)^2 = \left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ (2x'-1)^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$$

D'où : $x'^2 + y'^2 = (2x'-1)^2$

$$x'^2 + y'^2 = (2x'-1)^2$$

b)

$\Gamma : x^2 + y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9} - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9}\right] - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

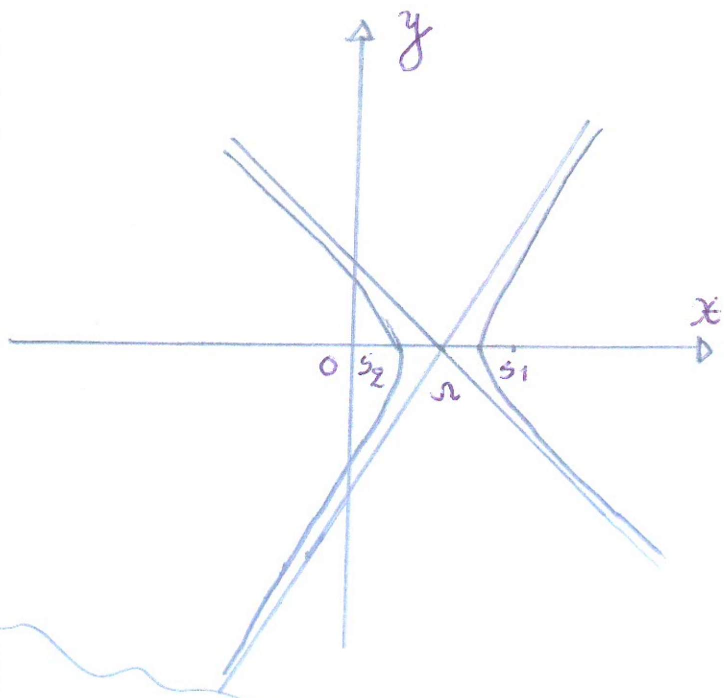
$$\Gamma : \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$$

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec}$$

$a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc Γ est Une hyperbole d centre $\Omega\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ et de sommets $S_1 : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}, 0\right) = (1,0)$ et $S_2 : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{2/3}{1/3} = 2$$



X^c

$E_\theta : z^2 - (6\cos\theta) z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$

$= z^2 - 6\cos\theta z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$

1) a) Resolvons l'equation:

na: $\Delta = 9\cos^2\theta - 4 - 5\cos^2\theta$

$= 4\cos\theta - 4 = -4(\sin\theta - 1)$

$= -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$

Donc l'equation admet deux Solution distinctes:

$z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$; $z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$.

Solution de E_θ Suivant le valeur de θ:

E_θ admet une solution double :

$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

dans ces cas: $z_1 = 3\cos 0 = 3$

$z_2 = 3\cos\pi = -3$

Solution Imaginaire pur:

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$ ou $\theta = \frac{3\pi}{3}$

dans ces cas: $\begin{cases} z_{B_1} = 2i \\ z_{B_2} = -2i \end{cases}$

2) Soient $M_1(x:y)$; $M_2(x_2:y_2)$ le Imag~~inaires~~ respective de z_1 et z_2:

$z_{M_1} = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$;

$z_{M_2} = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_{M_1} = 3\cos\theta \\ y_{M_1} = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{x_{M_1}}{3}\right)^2 = \cos^2\theta$

$\left(\frac{y_{M_1}}{2}\right)^2 = \sin^2\theta$

donc:

$\frac{x_{M_1}^2}{3^2} + \frac{y_{M_1}^2}{2^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$.

de m $\frac{x_{M_2}^2}{3^2} + \frac{y_{M_2}^2}{2^2} = 1$

donc: M_1 et M_2 appartient le même Elipse d'equation

$$\boxed{\frac{X^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1}$$

b) ~~donc~~ T est une ellipse de Centre O et des

- sommets $A(3:0)$ $A'(-3:0)$; $B(0:2)$; $B'(0:-2)$

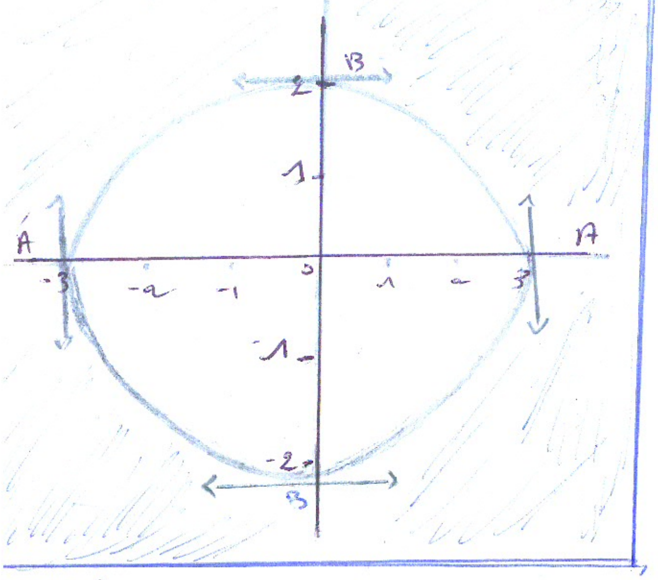
- et de foyers $F(\sqrt{5}:0)$ $F'(-\sqrt{5}:0)$

- d'axe focal $(O:\vec{i})$ de directrices:

$D: x = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $D': x = -9/\sqrt{5}$

- et d'excentricite $e = \sqrt{5}/3$.

A(3;0) B(0;2)
A'(-3;0) B'(0;-2)



3) $f(M) = M' \Leftrightarrow M' = bar \begin{array}{c|c|c} A, & B, & M \\ -4 & 2 & 3 \end{array}$

$z' = \frac{-4z_A + 2z_B + 3z}{1}$

$= \frac{-4 \times 3 + 2 \times 2i + 3z}{1}$

donc $z' = 3z - 12 + 4i$

$a, 3 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $z = az + b$

donc f est une homothétie de Rapport $k = 3$ et de Centre Ω d'affixe

$z_\Omega = \frac{-12+4i}{1-3} = 6 - 2i$

~~f=kl~~

) $\Gamma' = f(\Gamma)$

$M(x';y') \in \Gamma'$; $M(x;y) \in \Gamma$

tel que $f(M) = M'$

$\Longleftrightarrow x' + iy = Z$

$\Rightarrow Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$

mai: $x + iy = 3(x+iy) - 12 + 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 12 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \frac{x'+12}{3} \\ y = \frac{y'-4}{3} \end{cases}$

d'aprés 2-a :

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{(x'+12)^2}{9^2} + \frac{(y'-4)^2}{6^2} = 1$

donc l'équation cartésienne de Γ est :

$$\boxed{\frac{(x'+12)}{9^2} + \frac{(y'-4)}{6^2} = 1}$$