Nom : lalle mint Lenaye.

Bac 2014 SN :

Complexe :

Exercice :

① $p(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$.

$p(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$\Rightarrow p(2i) = 0$

Tableau de Hornner :

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	$\downarrow$	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$.

$p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$= (i\sqrt{3})^2$.

$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

$z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2i, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$\operatorname{Im}(2i) \geq \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

② a) on a : $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et

$C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. soit $M(x,y)$

$M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$.

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$.

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + iy \mid y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

or : $z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

D'où : $z' = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + iy + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

$z' = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$.

Donc M' est sur l'axe des abscisses.

③ a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$f(z) = \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors

$|z|^2 = 1$.

d'où $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + 1 + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

b) si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$

et $|z| = 1$.

Donc : $f(z) = \dfrac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$.

4) a) $M \in \mathcal{C}(O,1) \setminus \{B,C\} \Rightarrow$

$z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow z' = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2 = \dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$$

D'où : $x'^2+y'^2 = (2x'-1)^2$.

b) Γ : $x^2+y^2 = (2x-1)^2$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-y^2 = -1$.

$\Leftrightarrow 3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}\right]-y^2 = -1$.

$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-y^2 = \frac{1}{3}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{1/9} - \dfrac{y^2}{1/3} = 1$

Γ : $\dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$.

Γ : $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ et de sommets :

$S_1 : \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}, 0\right) = (1,0)$ et

$S_2 : \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$

et d'excentricité

$e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \dfrac{2/3}{1/3} = 2$.