Nom = lalle mint Lenaye.

Bac 2013 SN :

Complexe :

$p(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32+4i$.

a) $p(4) = 4^3 - (9-i)\times 16 + 4(28-5i) - 32+4i$

$= 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i$

$= 0$.

$p(z) = (z-4)(z^2+az+b)$.

En utilisant le tableau d'Horner :

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-3+4i$
4	↓	4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$p(z) = (z-4)(z^2+(-5+i)z+8-i)$

b) $p(z)=0 \iff z-4=0 \iff z=4$.

ou $z^2+(-5+i)z+8-i=0$.

$\Delta = (-5+i)^2 - 4\times 1(8-i)$

$= 25 - 10i - 1 - 32 + 4i$

$= -8 - 6i = (1-3i)^2$.

$z_1 = \dfrac{5-i+1-3i}{2} = 3-2i$.

$z_2 = \dfrac{6-i-1+3i}{2} = 2+i$.

$S = \{4, 3-2i, 2+i\}$.

② $A(4)$; $B(2+i)$, $C(3-2i)$

a) $S : H(z) \to H'(z')$ /

$z' = az+b$ / $a, b \in \mathbb{C}$.

$S : C \to C \iff z_C = a z_C + b \ \cdots ①$

$S : A \to B \iff z_B = a z_A + b \ \cdots ②$

①-② donne

$z_C - z_B = a(z_C - z_A)$

$\Rightarrow a = \dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \dfrac{3-2i-2-i}{3-2i-4}$

$a = \dfrac{1-3i}{-1-2i} = \dfrac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4}$

$a = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i \Rightarrow a = 1+i$

$b = z_C - a z_C = (1-a)z_C$.

$\Rightarrow b = (1-1-i)(3-2i)$.

$\Rightarrow b = -3i-2$.

Donc :

$S : M(z) \to M'(z')$

$z' = (1+i)z - 2 - 3i$.

b) le rapport : $k = |1+i| = \sqrt{2}$

l'angle $\theta = \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

③ $\varphi(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i$.

a) $\varphi(z) = (x+iy)^2 - (5-i)(x+iy) + 8 - i$.

$= x^2 - y^2 + 2xiy - 5x - 5iy + xi - y + 8 - i$.

$\Rightarrow \varphi(z) = x^2 - y^2 - 5x - y + 8 + i(2xy - 5y + x - 1)$.

$\Gamma = \{ M \in P \mid Q(z)$ est imaginaire pur non nul $\}$.

$\iff R_e(Q(z)) = 0$.

$\iff x^2 - y^2 - 5x - y + 8 = 0$

$\iff (x - \frac{5}{2})^2 - (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{24}{4} + 8 = 0$.

$\iff (x - \frac{5}{2})^2 - (y + \frac{1}{2})^2 = 2$.

$\iff -\dfrac{(x - \frac{5}{2})^2}{(\sqrt{2})^2} + \dfrac{(y + \frac{1}{2})^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$. Γ a pour équation : $-\dfrac{X^2}{(\sqrt{2})^2} + \dfrac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$.

D'où Γ est une hyperbole de centre Ω et des sommets.

b) sommets :

$B(0, \sqrt{2})$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. et $B'(0, -\sqrt{2})$.

Mais dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a $B(\frac{5}{2}; \sqrt{2} - \frac{1}{2})$ et $B'(\frac{5}{2}; -\sqrt{2} - \frac{1}{2})$.

les asymptotes Δ et Δ' ont pour équations dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

$\Delta : Y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = X$ et

$\Delta' : Y = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = -X$.

et Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a : $y + \frac{1}{2} = x - \frac{5}{2}$.

$\iff \Delta : y = x - 3$.

et $y + \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$.

$\iff \Delta' : y = -x + 2$.