Nom : lalle mint lenaye.

**Bac 2012**

**Complexe :**

$E_\theta : z^2 - (6\cos\theta)z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$.
$\theta \in [0, 2\pi[$.

① a) Résolvons l'équation $E_\theta$ :

$\Delta' = 9\cos^2\theta - 4 - 5\cos^2\theta$
$= 9\cos^2\theta - 4 - 5\cos^2\theta$
$= 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$.
$= (2i\sin\theta)^2$ donc

$\delta = 2i\sin\theta$.

les solutions sont :

$z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$.
$z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$.

$\forall \theta \in [0, \pi[$ $\sin\theta \geq 0$ donc
$\forall \theta \in [0, \pi[$ $\operatorname{Im}(z_1) \geq 0$.

b). $E_\theta$ admet des solutions doubles.

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$ ; $\theta \in [0, 2\pi[$
$\Leftrightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

dans ce cas $z_{A_1} = 3$ et $z_{A_2} = -3$.

$E_\theta$ admet des solutions imaginaires pures $\Leftrightarrow \cos\theta = 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

dans ce cas $z_{B_1} = 2i$,
$z_{B_2} = -2i$.

② a) $z_{M_1} = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$ ;
$z_{M_2} = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$.

$\begin{cases} x_{M_1} = 3\cos\theta \\ y_{M_1} = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x_{M_1}}{3}\right)^2 = \cos^2 \\ \left(\frac{y_{M_1}}{2}\right)^2 = \sin^2 \end{cases}$

donc

$\frac{x_{M_1}^2}{3^2} + \frac{y_{M_1}^2}{2^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

de même $\frac{x_{M_2}^2}{3^2} + \frac{y_{M_2}^2}{2^2} = 1$.

donc $M_1$ et $M_2$ appartiennent. le même ellipse d'équation $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

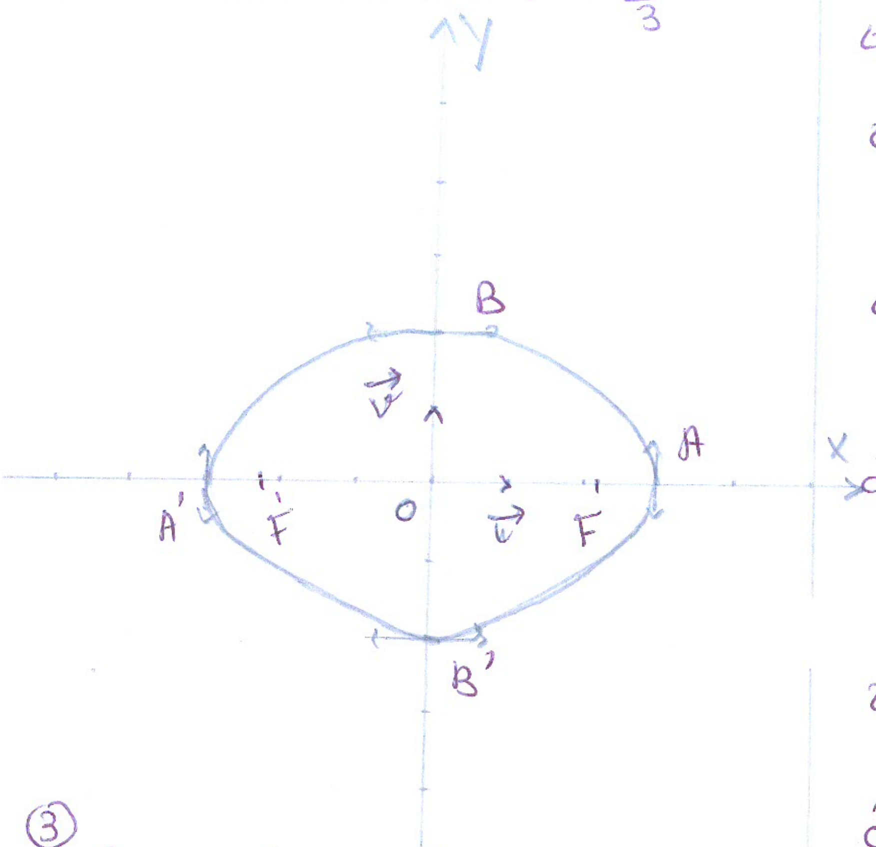
donc $\Gamma$ est une ellipse de centre $O$ et d'équation cartesienne

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

b) $\Gamma$ est une ellipse de centre $O$ et des sommets $A(3;0)$ ; $A'(-3;0)$ ; $B(0,2)$ $B'(0;-2)$ et de foyers $F(\sqrt{5},0)$ ; $F'(-\sqrt{5},0)$ d'axe focal $(O,\vec{i})$ de directrices.

$D : x = \frac{9}{\ldots}$ ; $D' : x = \frac{-9}{\ldots}$

et d'excentricité : $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$




③ $f(M) = M' \iff M' = \text{bar}$

| $A_1$ | $B_1$ | $M$ |
|---|---|---|
| $-4$ | $2$ | $3$ |

$$z' = \frac{-4z_{A_1} + 2z_{B_1} + 3z}{-4+2+3}$$

$$= \frac{-4\times 3 + 2\times 2i + 3z}{1}$$

donc $z' = 3z - 12 + 4i$

a) $3 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $z' = az+b$

donc $f$ est une homothétie de rapport $k=3$ et de centre $\Omega$ d'affixe.

$$z_\Omega = \frac{-12+4i}{1-3} = 6-2i$$

b) $\Gamma' = f(\Gamma)$

$M(x';y') \in \Gamma'$, $M(x,y) \in \Gamma$

telle que $f(M) = M'$.

$\iff x' + iy' = 3(x+iy) - 12 + 4i$

$\iff \begin{cases} x' = 3x - 12 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{x'+12}{3} \\ y = \frac{y'-4}{3} \end{cases}$

d'après 2-a)

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

$$\iff \frac{(x'+12)^2}{9^2} + \frac{(y'-4)^2}{6^2} = 1.$$

donc l'équation cartesienne de $\Gamma'$ est.

$$\frac{(x'+12)}{9^2} + \frac{(y'-4)}{6^2} = 1$$

Fin