Nom : Mohamed / Bamba Keibed
Classe : 7C

Corrigé du Bac 2014 SC

Exercice 5

1/a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} = \frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{x}{e^x}}$

$= \frac{1}{1-0} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

• $y=1$ AH à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

• $y=0$ AH à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

c) $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + e^x}{(e^x - x)^2}$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - 1)^2}}$

le signe de $f'(x)$ est celui de $-x+1$

et $f'(x) = 0 \Rightarrow -x+1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$\boxed{f(1) = \frac{e}{e-1}}$

T.V de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

2/ $A = \int_0^1 f(x)\,dx$ (car $f(x) > 0$)

$\forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

$1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$

Donc : $\int_0^1 1\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{e}{e-1}\,dx$

$\Rightarrow \boxed{1 \leq A \leq \frac{e}{e-1}}$

3/a) $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$I_1 = \left[-xe^{x} - e^{-x}\right]_0^1$

$\boxed{I_1 = 2e^{-1} + 1}$

Exercice : 5 (suite)

3/ b/ $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$

on a : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$-n \leq -xn \leq 0 \Rightarrow e^{-n} \leq e^{-xn} \leq 1$

$0 \leq x^n e^{-nx} \leq x^n$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{-nx} \leq \int_0^1 x^n dx$

$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

d'où $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$

or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Donc : D'après le T.G :

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

4/ a) $S_n = I_0 + I_1 + I_2 \cdots\cdots + I_n$

$S_n = 1 + \int_0^1 xe^{-x} + \int_0^1 x^2 e^{-2x} \cdots + \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$

$S_n = \int_0^1 (1 + (xe^{-x}) + (xe^{-x})^2 \cdots\cdots + (xe^{-x})^n) dx$

$S_n = \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^n}{1 - xe^{-x}} dx$

(somme d'une suite géométrique)

b/ $A - S_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - x} dx - \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{1 - xe^{-x}} dx - \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1 - xe^{-x}} - \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} \right) dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{+ (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} \right) dx$

$\Rightarrow \boxed{A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx}$

c/ On a : $A - S_n = \int_0^1 (xe^{-x})^{n+1} \cdot f(x) dx$

$= \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^{-(n+1)x} \cdot f(x) dx$

or : $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$ (1)

et $0 \leq e^{-(n+1)} \leq e^{-(n+1)x} \leq 1$ (2)

D'où : en multipliant (1) par (2) membre à membre on a :

$0 \leq e^{-(n+1)x} \cdot f(x) \leq \frac{e}{e-1} \leq 2$

Et en multipliant par x^{n+1}.

On a : $0 \leq x^{n+1} \cdot e^{-(n+1)x} \cdot f(x) \leq 2x^{n+1}$

$0 \leq \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^{-(n+1)x} \cdot f(x) dx \leq \int_0^1 2x^{n+1} dx$

$0 \leq A - S_n \leq 2\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$

$\boxed{0 \leq A - S_n \leq \frac{2}{n+2}}$

or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+2} = 0$

D'où : $\lim_{n \to +\infty} (A - S_n) = 0$

Donc : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = A}$

d/ $\frac{2}{n_0 + 2} \leq 10^{-2} \Rightarrow \frac{n_0 + 2}{2} \geq 100$

$\Rightarrow n_0 + 2 \geq 200 \Rightarrow n_0 \geq 200 - 2$

$\boxed{n_0 \geq 198}$

Nom: Mohamed o/ Brahim Vall
N°: 1346
Ecole: ERRaja

BAC 2014 SN

Exo 3:

1) a) on a : $f(0)=0$ et
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} x\ln(1+\frac{1}{x})$
$= \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\frac{x+1}{x})$
$= \lim\limits_{0^+} x(\ln(x+1)-\ln x)$
$= \lim\limits_{0^+} (x\ln(x+1) - x\ln x)$
$= 0 - 0 = 0$

Donc: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$
D'où f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x})-0}{x-0}$
$\lim \ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$
f n'est pas derivable à droite en 0 et la courbe $\mathcal{C}$ de f admet au point d'abscisse une demi-tangente verticale

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$ FI
$(+\infty)\,(0)$ FI
on pose : $t=\frac{1}{x}$
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} t = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et
$x = \frac{1}{t}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$ Donc: $y=1$ AH à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

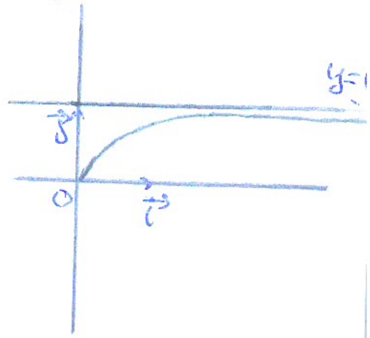
2) a) $\forall x>0$ $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$
$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$
$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + x(-\frac{1}{x^2})(\frac{x}{x+1})$
$= \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$
$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$
$= (-\frac{1}{x^2})(\frac{x}{x+1}) + \frac{1}{(x+1)^2}$
$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$
$= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$
$\boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0;\ \forall x>0$
Donc $f'(x)$ est $\searrow$ sur $]0;+\infty[$
or $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$
$= \lim\limits_{+\infty}(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1})$
$= 0 - 0 = 0$
D'où $\boxed{\forall x>0;\ f'(x)>0}$

b) T.V de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	0 ↗	1

c) Tracer



Exe 3 (suite)

3) a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0;1]$

Montrons que f_n est continue sur $[0;1]$

- sur $]0;1]$; $f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonct° $x \to x^n$ et $x \to \ln(1+\frac{1}{x})$ continues sur $]0;1]$

d'où f_n est continue sur $]0;1]$

- Etudions la continuité de f_n à droite en 0

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{0^+} x^n(\ln(x+1)-\ln x)$

$= \lim_{0^+} x^n\ln(x+1) - x^n\ln x$

$= 0 - 0 = 0$

$= f_n(0)$

D'où f_n est continue à droite en 0

Donc : f_n est continue sur $[0;1]$ et l'intégrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette écriture définie bien une suite numérique (A_n)

b) D'après le TV de la fonct° définie dans la question 1) on a : $\forall x \geq 0 \quad 0 \leq f(x) < 1$

D'où en multipliant par x^{n-1}

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

or $\forall x \in [0;1]$, $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où $\forall x \in [0;1]$

$0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

D'où $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\boxed{\forall n \geq 1 \quad 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; D'où d'après le T.G

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = 0}$

4) a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases} \to \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\int_\alpha^1 x^n\,dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$

$I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) $\lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha) = \lim\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{(n+1)}(\alpha\ln\alpha) - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$\boxed{\lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}}$

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on utilise IPP

Exo 3 (Suite)

$$S_{n+1} = \Big[x^{n+1}\big((x+1)\ln(x+1) - x\big)\Big]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n\big((x+1)\ln(x+1) - x\big)\,dx$$

$$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1} + x^n)\ln(x+1)\,dx + (n+1)\int_0^1 x^{n+1}\,dx$$

$$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 \big(x^{n+1}\ln(x+1) + x^n\ln(x+1)\big)\,dx + (n+1)\Big[\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big]_0^1 - 1$$

$$= 2\ln 2 - (n+1)\Big(\int_0^1 x^{n+1}\ln x\,dx + \int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx + (n+1)\Big(\frac{1}{n+2} - 0\Big) - 1$$

$$= 2\ln 2 - (n+1)(S_{n+1} - S_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$$

Donc :

- $S_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)S_{n+1} - (n+1)S_n - \frac{1}{n+2}$

$$S_{n+1} + (n+1)S_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)S_n$$

$$(n+2)S_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)S_n$$

$$S_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}S_n$$

Nom: Mohamed o/Brahim vall
N°: 1346
école: ERRaga

BAC 2011 SC

Exercice: 4

Soit la fonct° f définie sur $]-1; +\infty[$ par
$f(x) = x.\ln(x+1)$

1) a) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} x.\ln(x+1)$

$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to (-1)^+} x = -1 \\ \lim\limits_{x \to (-1)^+} \ln(x+1) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases}$

D'où $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = (-1)(-\infty) = +\infty$

Interprétat° graphique
la droite d'équat° $\boxed{x = -1}$
$x = -1$ A.V

• $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\ln(x+1)}{x}$
$= \lim\limits_{+\infty} \ln(x+1) = +\infty$

D'où $\boxed{\lim \frac{f(x)}{x} = +\infty}$

la courbe C_f admet une B.P de direct° (oy)

b) Calcule de la dérivée
$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

• si $x \in]-1; 0] \Rightarrow x+1 \leq 1$
Donc $\ln(x+1) \leq 0$
et $x+1 > 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} \leq 0$

D'où $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \leq 0$

D'où $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ est decroissant

⊕ si $x \in [0; +\infty[$ alors
$1 + x \geq 1 \Rightarrow \ln(x+1) \geq 0$ et $\frac{x}{x+1} \geq 0$
d'où $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \geq 0$
D'où $f(x)$ est croissant

c) le T.V de f

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2) a) Determiner les reel a, b et c tel que $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1}$

$\frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$

Par identificat° $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \Rightarrow b = -1 \\ b + c = 0 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$

D'où
$\boxed{\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}}$

b) $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$

on pose $\begin{cases} u' = x \\ v = \ln(x+1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = \frac{x^2}{2} \\ v' = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

Exo 4 : (suite)

2) b) :

D'au

$A = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}dx$

$= \left[\frac{1}{2}\ln 2\right] - \frac{1}{2}\int_0^1 \left((x-1) + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$

$A = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^1$

$A = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}\ln(2)$

$\boxed{A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ u.a}$

3) $\forall n \geq 1$: on pose

$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$

la fonct° $x \to x^n \ln(x+1)$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$ alors $\int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$ existe bien ; d'où la suite (u_n) est bien definie

b) Calcul de u_1

$u_1 = \int_0^1 x \ln(x+1)dx$

D'où $u_1 = A \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{4}}$

Donc u_1 est l'aire calculer dans le question 2) b)

) M.q (u_n) est decroissante

on calcule $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$

$= \int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1) - x^n \ln(x+1))dx$

$= \int_0^1 (x^n \ln(x+1)).(x-1)dx$

Pour $x \in [0;1]$

$x^n \ln(x+1) \geq 0$ et $(x-1) \leq 0$

d'où $(x^n \ln(x+1)).(x-1) \leq 0$

D'où $\boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$

donc la suite (u_n) est decroissante

or $x^n \ln(x+1) > 0$

$\Rightarrow (u_n) > 0$ donc la suite (u_n) est minorée par (0) et $\searrow$ d'où (u_n) est convergente

d) on a pour tout $n \geq 1$

si $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$

$\Rightarrow \ln(1) \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$

$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$

$0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$

$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)dx$

$0 \leq u_n \leq \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \ln(2).\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}}$

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ d'Apres le T.G

Exo4 (suite)

4) Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$V_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$$

a) On a :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$$

on pose : $\begin{cases} u' = x^n \\ v = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v' = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

d'où

$$U_n = \left[\frac{x^n}{n+1} \ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} dx$$

$$U_n = \frac{1}{n+1} \ln 2 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$$

$$\boxed{U_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} V_n}$$

b) Si $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

$\frac{x^{n+1}}{2} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1} \leq x^{n+1}$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \leq V_n \leq \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

D'où $\boxed{\frac{1}{2(n+2)} \leq V_n \leq \frac{1}{n+2}}$

$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ d'après l T.G

c) On a : $V_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$

$n \geq 1$ Nous avons que :

$$\sum_{i=0}^{n} (-x)^i = 1 - x + (-x)^2 + \cdots + (-1)^n (x)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (-x)^i = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$= \frac{1-(-1)^{n+1}(x)^{n+1}}{1+x}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (-x)^i - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^n (x)^{n+1}}{1+x}$$

$$\Rightarrow (-1)^n \left[1 - x + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{(x)^{n+1}}{1+x}$$

$$\Rightarrow V_n = (-1)\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ln(1+x)\right]_0^1$$

$$\Rightarrow V_n = (-1)^n \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln(2)\right]$$

d) On a $\lim_{+\infty} V_n = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{+\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+2} - \ln(2) = 0$$

$$\Rightarrow \lim 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

$$\lim_{+\infty} V_n = \ln(2)$$

Nom: Mohamed/Brahim Vall
N°: 1346
Ecole: ERRaja

BAC 2012 SC

Exercice 3

$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$

1a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{e^x} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{x^3}{e^x} = 0$

$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \frac{2x^2}{e^x} = +\infty$

$\Rightarrow y = 0$ AH (au voisinage de $+\infty$)

C_f admet une B.P direct° (oy) au voisinage de $-\infty$

b) $f'(x) = \frac{(6x^2 - 6x)e^x - e^x(2x^3 - 3x^2 + 1)}{e^{2x}}$

$f'(x) = e^{-x}(-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^3 + 9x^2 - 6x - 1 = 0$

$-2 + 9 - 6 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$

en factorise par $(x-1)$ on a:

$f'(x) = (x-1)(-2x^2 + 7x + 1)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou

$-2x^2 + 7x + 1 = 0$

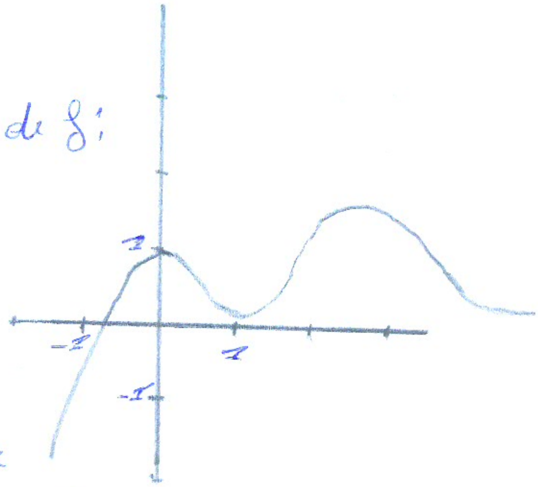
$\Delta = 57$; $x_1 = \frac{-7 - \sqrt{57}}{-4} = \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$

$x_2 = \frac{7 - \sqrt{57}}{4}$

T.V de f

x	$-\infty$		x_2		1		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_2)$	↘	0	↗	$f(x_1)$	↘	0

la Courbe de f:



3) a) $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

la fonction $x^n e^{-x}$ est Continue sur l'intervalle $[0;1]$ donc la suite (I_n) est bien definie

b) $x \in [0;1] \Rightarrow x^n e^{-x} \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1) dx \leq 0$

$\Rightarrow I_n$ est decroissante minore par 0 elle Converge

c) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$

$\Rightarrow \frac{1}{e(n+1)} \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} I_n = 0$

4) a) $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1} \Rightarrow \boxed{I_0 = 1 - \frac{1}{e}}$

b) $\begin{cases} v = x^n \\ v' = e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v' = -e^{-x} \end{cases}$

$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1} I_{n+1}$

$= \frac{1}{n+1} e^{-1} + \frac{1}{n+1} I_{n+1}$

$\Rightarrow (n+1) I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1} \Rightarrow \boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n}$

c) $A = \int_0^1 f(x) dx$

$= \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) e^{-x} dx = \int$

$= \int_0^1 2x^3 e^{-x} dx - \int_0^1 3x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 e^{-x} dx$

$= 2\int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 3\int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 e^{-x} dx$

$\boxed{A = 2I_3 - 3I_2 + I_0}$

Nom: Mohamed / Brahim Vall

N°: 1346

Ecole: ERRaja

BAC 2014 SC

Exercice 5

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{e^x - x}$

$= \lim \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$

$= \frac{1}{1-0} = 1$

$y = 1$ A.H à C_f au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim \frac{e^x}{e^x - x} = 0$

$y = 0$ A.H à C_f au voisinage de $-\infty$

c) $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(x-1)}{(e^x - x)^2}$

$f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$ et $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

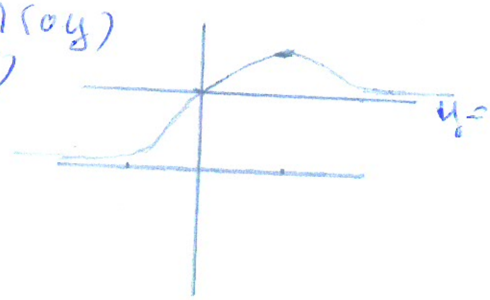
$f(1) = \frac{e}{e-1}$

T.V de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

$C \cap (Oy)$

$(0; 1)$



2) $A = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx$

(Car $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

or d'après le T.V de f $\forall x \in [0;1]$

$1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$ (Car $f(0) = 1$)

D'où $\int_0^1 dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 \frac{e}{e-1}dx$

Donc: $\boxed{1 \leq A \leq \frac{e}{e-1}}$

3 a) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \rightarrow v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$I_1 = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$

$= [-x e^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1$

$= [-(x+1)e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1} + 1$

$\boxed{I_1 = 1 - 2e^{-1}}$

b) $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow$

$-n \leq -nx \leq 0 \Rightarrow e^{-n} \leq e^{-nx} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq e^{-nx} \leq 1$

$0 \leq x^n e^{-nx} \leq x^n$

$0 \leq \int_0^1 x^n e^{-nx} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

or: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

D'où d'après le T.G $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

EXOS (Suite)

4a) $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$

$= 1 + \int_0^1 x e^{-x} dx + \dots + \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$

$= \int_0^1 dx + \int_0^1 x e^{-x} dx + \dots + \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$

$= \int_0^1 (1 + (xe^{-x}) + (xe^{-x})^2 + \dots + (xe^{-x})^n) dx$

$= \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

(somme partielle d'une S G)

b) $A - S_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - x} dx - \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x (1 - xe^{-x})} dx - \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

c) $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 (xe^{-x})^{n+1} \times f(x) dx$

$= \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$

or ; $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$ (1)

et $0 \leq e^{-(n+1)} \leq e^{-(n+1)x} \leq 1$ (2)

d'où en multipliant (1) par (2)

$0 \leq e^{-(n+1)x} \times f(x) \leq \frac{e}{e-1} < 2$

Donc $0 \leq e^{-(n+1)x} \times f(x) \leq 2$

Et en multipliant par x^{n+1} on a ;

$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} \times f(x) \leq 2x^{n+1}$

d'où

$0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} \times f(x) dx \leq \int_0^1 2x^{n+1} dx$

$0 \leq A - S_n \leq \left[\frac{2x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$

$0 \leq A - S_n \leq \frac{2}{n+2}$

or $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+2} = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} (A - S_n) = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = A$

d) $\frac{2}{n_0 + 2} < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{n_0 + 2}{2} > 100$

$n_0 + 2 \geq 200 \Leftrightarrow \boxed{n_0 \geq 198}$