Nom : Mohamed yahya o/Mohamed

# Bac : 2013 . S. N

EX4 :

1.a) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + x^3 - 3x^3 \ln x = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$ donc g est continue en $0^+$

* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + x^3 - 3x^3 \ln x$ F.I

$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left( \frac{1}{x^3} + 1 - 3\ln x \right) = -\infty$

$g'(x) = 3x^2 - 9x^2 \ln x - 3x^2 = -9x^2 \ln x$

$g'(x) \geq 0 \ \forall x \in ]0;1[$

$g'(x) \leq 0 \ \forall x \in ]1, +\infty[$

$g(1) = 1+1-0 = 2$

b) T.V

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

c) g est continue et strictement decroissante sur $[1, +\infty[$ et change le signe donc l'equation $g(x) = 0$ admet une unique solution telque $\alpha > 1$

$g(1) = 2 > 0$

$g(2) = -24\ln 2 < 0$

| $x$ | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

2.a)

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1+x^3} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1+x^3}$ F.I

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \left( \frac{x}{1+x^3} \right) = \lim_{x \to +\infty} 0 \times \left( \frac{1}{x^2} \right) = 0$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^3) - 3x^2(\ln x)}{(1+x^3)^2}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^3 - 3x^3 \ln x)}{(1+x^3)^2}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(g(x))}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$

T.V.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

3 a)

f est continue sur $[1, +\infty[$ donc elle admet une primitive H derivable sur $[1, +\infty[$

$F(x) = H(x) - H(1)$

donc F est derivable $F'(x) = f(x)$

pour tout $x > 1$, $f(x) > 0$

donc F est croissante

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x) = f(x)$ | | $+$ | |
| $F(x)$ | $0$ | ↗ | $A/4$ |

Suite de Exo.

b) pour tout $t \geq 1$.

$$1 < t^3 \leqslant 1+t^3 \leqslant (1+t)^3$$

$$\frac{1}{(1+t)^3} \leqslant \frac{1}{1+t^3} \leqslant \frac{1}{t^3}$$

. $t > 1$, $\ln t > 0$

$$\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leqslant \frac{\ln t}{1+t^3} \leqslant \frac{\ln t}{t^3}$$

$$\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t^3}$$

c) $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln t}{t^3}\,dt$

on pose

$$\begin{cases} u(n) = \ln t \\ v'(n) = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(n) = \frac{1}{t} \\ v(n) = -\frac{1}{2t^2} \end{cases}$$

$$-\left[\frac{\ln t}{2t^2}\right]_1^n + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$-\frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t^2}\right]_1^n$$

$$\frac{-\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4}$$

d)

$$\frac{1}{t(1+t)^3} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$$

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t) + ct}{t(1+t)^2}$$

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a + 2at + at^2 + bt + bt^2 + ct}{t(1+t)^2}$$

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a + (a+b)t^2 + (2a+b+c)t}{t(1+t)^2}$$

par identification

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ 2a+b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}$$

4; a)

$$\int_1^n \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt \leqslant \int_1^n \frac{\ln t}{1+t^3}\,dt \leqslant \int_1^n \frac{\ln t}{t^3}\,dt$$

$$\int_1^n \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt \leqslant f(t) \leqslant \int_1^n \frac{\ln t}{t^3}\,dt$$

on pose $J = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$

$$\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{-1}{2(1+t)^2} \end{cases}$$

$$-\left[\frac{\ln t}{2(1+t)^2}\right]_1^n + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{t(1+t)^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln n}{2(1+n)^2} + \frac{1}{2}\left[\int_1^n \frac{1}{t}\,dt - \int_1^n \frac{1}{1+t}\,dt - \int_1^n \frac{1}{(1+t)^2}\,dt\right]$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln n}{2(1+n)^2} + \frac{1}{2}\left([\ln t]_1^n - [\ln(1+t)]_1^n + \left[\frac{1}{1+t}\right]_1^n\right)$$

$$\frac{-\ln n}{2(1+n)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln n - \ln(n+1) + \ln 2 + \frac{1}{1+n} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{-\ln n}{2(1+n)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) + \frac{2\ln 2 - 1}{2} + \frac{1}{1+n} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{-\ln n}{2(1+n)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{2\ln 2 - 1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4}$$

suite

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1-2\ln 2}{2}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\leqslant F(x)\leqslant \frac{1}{4}-\frac{1}{4x^2}-\frac{\ln x}{2x^2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{2(1+x)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\overset{\to 0}{\frac{-\ln x}{x}}\times\overset{\to 0}{\frac{x}{(1+x)^2}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)=\ln(1)=0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{+\infty}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{2x^2}=0$

En fin $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\leqslant \ell\leqslant \frac{1}{4}$

) courbe