Bac 2015 SC

Ahmed/Abdellahi

1) $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$

$f'(x) = \frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2}$

$= \frac{-x e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x}{e^x} = -x e^{-x}$

$f'(x) = 0 \iff -x = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) $F_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n+1}}{e^t}\, dt$

$\begin{cases} u(x) = (1+t)^{n+1} \\ v'(x) = e^{-t} \end{cases} \iff \begin{cases} u'(x) = (n+1)(1+t)^n \\ v(x) = -e^{-t} \end{cases}$

$F_{n+1}(x) = \left[-e^{-t}(1+t)^{n+1}\right]_{-1}^{x} + \int_{-1}^{x} (n+1)(1+t)^n e^{-t}\, dt$

$F_{n+1}(x) = -e^{-x}(1+x)^{n+1} + (n+1)\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^n}{e^t}\, dt$

$= \frac{-(1+x)^{n+1}}{e^{-x}} + (n+1)\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^n}{e^t}\, dt$

$F_{n+1}(x) = -f_{n+1}(x) + (n+1) F_n(x)$

$F_{n+1}(x) = F_n(x) - f_{n+1}(x)$

3) a) de l'inegalite ~~prudedente~~ precedente

on a :

pour $x = 0$

$F_{n+1}(0) = (n+1) F_n(0) - f_{n+1}(0)$

$I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{(1+0)^n}{e^0}$

$\iff I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

b) On a : $-1 \leq t \leq 0$

$t \in [-1, 0] \iff (t+1) \in [0, 1]$

$\iff 0 \leq (t+1)^{n+1} \leq (t+1)^n \leq 1$

$0 \leq (t+1)^{n+1} \leq (t+1)^n$

$0 \leq (t+1)^{n+1} e^{-t} \leq (t+1)^n e^{-t}$

$0 \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^{n+1} e^{-t}\, dt \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^{-t}\, dt$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

$\iff I_{n+1} - I_n \leq 0$

$\iff I_n$ est decroissante

* Comme f continue et positive sur $[-1, 0]$ donc I_n positive

$\iff I_n$ decroissante et positive

c) D'une part on a :

$I_{n+1} \leq I_n$

$(n+1) I_n - 1 \leq I_n$

$n I_n + I_n \leq 1 + I_n$

$I_n \leq \frac{1}{n}$

D'autre part (I_n) positive

$\iff I_{n+1} \geq 0 \iff$

$(n+1) I_n - 1 \geq 0$

$\iff (n+1) I_n \geq 1$

$I_n \geq \frac{1}{n+1}$

Donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

4) $\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{I_n}{n!}$

a) $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1) I_n}{(n+1)\, n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

Dabord avant de deduire que $u_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ on Calcul u_1

$$u_1 = \frac{I_1}{1!} = I_1 = \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-t}\, dt$$

$$\begin{cases} u(t) = 1+t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \iff \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

$$u_1 = \left[-e^{-t}(1+t)\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-t}$$

$$u_1 = \left[-e^{-t}(1+t)\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-t}\right]_{-1}^{0}$$

$$u_1 = \left[-(2+t)e^{-t}\right]_{-1}^{0}$$

$$\boxed{u_1 = e - 2}$$

On a : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$

$$\cancel{u_2} = u_1 - \frac{1}{2!}$$

$$\cancel{u_3} = \cancel{u_2} - \frac{1}{3!}$$

$$\cancel{u_4} = u_3 - \frac{1}{4!}$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!}$$

$$u_n = u_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$u_n = e - 2 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$u_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$u_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

b) $u_n = \frac{I_n}{n!}$

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

$$u_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - u_n$$

$$\iff \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

Ahmed / Abdellahi

Ex : 3

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty}\left(\frac{1}{1+e^{x}}\right) = \frac{1}{1+0} = 1$

$\Longleftrightarrow y = 1$ A.H au Voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1+(+\infty)} = 0$

$y = 0$ A.H au Voisinage de $+\infty$

b) $f'(x) = \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2} < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$-$	
f	1	$\searrow$	0

c) f est Continue Strictement monotone donc f realise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$

$f(x) = y \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$\frac{1}{1+e^{x}} = y \Longleftrightarrow 1+e^{x} = \frac{1}{y} \Longleftrightarrow$

$e^{x} = \frac{1-y}{y} \Longleftrightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

Donc $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

2) a) $f(2\times0-x) + f(x) = f(-x) + f(x) =$

$= \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}} + \frac{1}{1+e^{x}}$

$= \frac{e^{x}}{1+e^{x}} + \frac{1}{1+e^{x}} = 1 = 2\times\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ le pt $A(0,\frac{1}{2})$ est un Centre de symetrie.

b) (C) et (C') sont symetriques par rapport à la droite d'equation $y = x$

$\Longleftrightarrow$ (C) et (C') ne peut se Coupent que sur Cette droite

$\Longleftrightarrow f(x) = x \Longleftrightarrow f(x) - x = 0$

Donc on pose : $V(x) = f(x) - x$

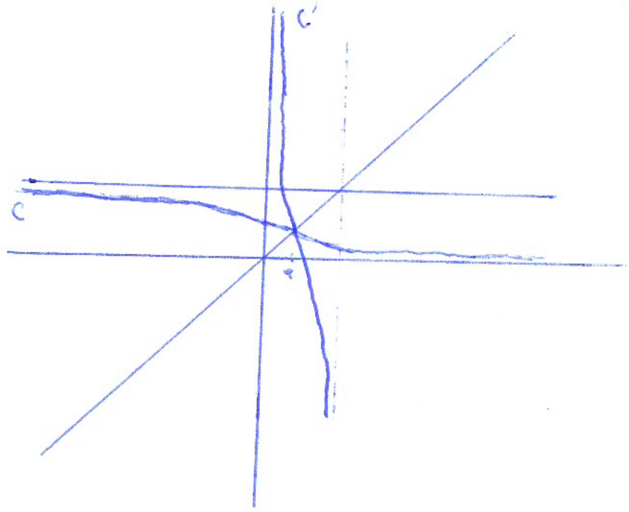
$V'(x) = f'(x) - 1 < 0 \Longleftrightarrow V \searrow$

$V(0,4) > 0$; $V(0,5) < 0$

Donc Comme V bijective et Change de Signe $\Longleftrightarrow$ il existe une unique solution α

$\Longleftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Longleftrightarrow f(\alpha) = \alpha$

Donc (C) et (C') Se Coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$



b) Comme (C) et (C') Sont Symetriques par rapport à $y = x$ alors

$A = 2\int_0^{\alpha}(f(x)-x)\,dx = 2\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{1+e^{x}} - x\right)dx$

Comme $\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{1}{1+e^{x}}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ alors :

$A = -2\int_0^{\alpha}\left(-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + x\right)dx = -2\left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\alpha}$

$A = -2\left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\alpha}$

$A = -2\left(\ln(1+e^{-\alpha}) + \frac{\alpha^2}{2} - \ln 2\right)$

$A = -2\left(\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\right)$

$A = -2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2$

$A = -2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2$

3) $I_1 = \int_0^{\alpha}\frac{1}{1+e^{t}}\,dt = -\int_0^{\alpha}\frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$

$= -\left[\ln(1+e^{-t})\right]_0^{\alpha}$

$= -\ln\left(1+\frac{1}{e^{\alpha}}\right) + \ln 2$

$$I_1 = -\ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right)^{-1}\right) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^\alpha+1}\, e^\alpha\right) + \ln 2$$

$$= \ln\left(f(\alpha)\, e^\alpha\right) + \ln 2$$

$$= \ln(\alpha e^\alpha) + \ln 2$$

$$= \ln \alpha + \alpha \ln e + \ln 2$$

$$\boxed{I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)}$$

b) $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1-1-e^x}{(1+e^x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{1-(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1}{(1+e^x)^2} - \dfrac{1}{1+e^x}$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = f^2(x) - f(x)}$

c) On multiplie par $f^{n-1}(x)$

$f^{n-1}(x) \cdot f'(x) = f^{n-1}(x) \cdot f^2(x) - f^{n-1}(x) \cdot f(x)$

$f^{n-1}(x) \cdot f'(x) = f^{n+1}(x) - f^n(x)$

$\int_0^\alpha f'(x) \cdot f^{n-1}(x) = I_{n+1} - I_n$

$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{1}{n} f^n(x)\right]_0^\alpha$

$\Leftrightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

d) $0 < \alpha < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^n < \frac{1}{2^n}$

$\Leftrightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0 \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n < 0$

$\Leftrightarrow (I_n)$ decroissante

D'autre par on a :

$\alpha > 0$ et f^n Continue et positive

Sur $[0;\alpha]$

(2)

Donc $\int_0^1 f^n(t)\,dt \geq 0$ d'où I_n positive

Donc I_n decroissante et positive

I_n decroissante et minorée par 0

donc I_n Converge

4) a) $0 \leq t \leq \alpha$ Comme f decroissante sur $\mathbb{R}$

$f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0) \Leftrightarrow$

$f^n(\alpha) \leq f^n(t) \leq f^n(0)$

$\int_0^\alpha f^n(\alpha)\,dt \leq I_n \leq \int_0^\alpha f^n(0)\,dt$

$\alpha^n(\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$

Comme $0 < \alpha < 1$ $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

b) On a : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

Donc

$\cancel{I_2} - I_1 = \frac{1}{1}\left(\alpha^1 - \frac{1}{2^1}\right)$

$I_3 - \cancel{I_2} = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$

$I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right)$

$\vdots$

$I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$I_n - I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = I_n - (\alpha + \ln 2\alpha)$

Donc :

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = -(\alpha + \ln 2\alpha)$

Car $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Bac 2015 SM ① Ahmed/Abdellahi

Ex : 3

1, a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = \frac{1}{1+0} = 1$

$y = 1$ A.H au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1+(+\infty)} = 0$

$y=0$ A.H au voisinage de $+\infty$

b) $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$-$	
f	1	$\searrow$	0

c) f continue strictement monotone donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$

$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$

$\frac{1}{1+e^x} = y \iff 1+e^x = \frac{1}{y}$

$\iff e^x = \frac{1-y}{y} \iff$

$x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right) \iff f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

2) a) $f(2x_0 - x) + f(x) = f(-x) + f(x)$

$= \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} + \frac{1}{1+e^x}$

$= \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} = 1 = \frac{1}{2}\times 2$

$\Rightarrow$ le pt $A(0;1/2)$ est un centre de symétrie.

b) (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite $y=x$

$\iff$ (C) et (C') ne peut se coupent que sur cette droite

$\iff f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

Donc on pose : $V(x) = f(x) - x$

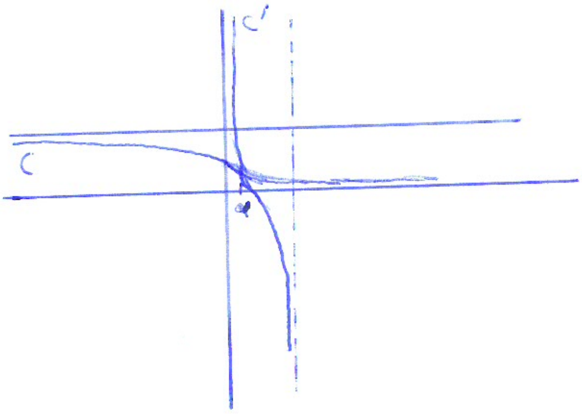
$V'(x) = f'(x) - 1 < 0 \iff V \searrow$

$V(0,4) > 0$, $V(0,5) < 0$

Donc comme V bijective et change de signe $\iff$ il existe une unique solution $\alpha \Rightarrow V(\alpha)$

$\iff f(\alpha) - \alpha = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$

Donc (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$



b) Comme (C) et (C') sont symétriques par rapport à $y=x$ alors

$A = 2\int_0^\alpha (f(x)-x)\,dx = 2\int_0^\alpha \left(\frac{1}{1+e^x} - x\right)dx$

Comme $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ alors :

$A = -2\int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + x\right)dx$

$= -2\left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha$

$= -2\left(\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\right)$

$= -2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right) - \alpha^2$

3) $I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{1+e^t}\,dt = -\int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$

$= -\left[\ln(1+e^{-t})\right]_0^\alpha$

$= -\ln\left(1+\frac{1}{e^\alpha}\right) + \ln 2$

$I_1 = -\ln\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(\left(\frac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right)^{-1}\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(\frac{e^\alpha}{e^\alpha+1}\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^\alpha+1} e^\alpha\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(f(\alpha) e^\alpha\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln\left(\alpha e^\alpha\right) + \ln 2$

$I_1 = \ln \alpha + \alpha \ln e + \ln 2$

$\boxed{I_1 = \alpha + \ln 2\alpha}$

b) $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1-1-e^{+x}}{(1+e^x)^2}$

$= \frac{1-(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{1+e^x}$

$f'(x) = f^2(x) - f(x)$

c) On multiplie par $f^{n-1}(x)$

$f^{n-1}(x) . f'(x) = f^{n-1}(x) . f^2(x) - f^{n-1} . f(x)$

$\int_0^\alpha f^{n-1}(x) . f'(x) dx = I_{n+1} - I_n$

$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{1}{n} f^n(x)\right]_0^\alpha$

$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

d) $0 < \alpha < \frac{1}{2} \iff \alpha^n < \frac{1}{2^n}$

$\iff \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0 \iff I_{n+1} - I_n < 0$

$\iff (I_n)$ decroissante

D'autre par on a :

$\alpha > 0$ et f^n Continue et positive Sur $[0, \alpha]$

Donc $\int_0^1 f(t)\, dt \geq 0$ d'où

I_n positive

Donc I_n decroissante et positive

I_n decroissante et minoreé par 0

$\iff$ donc (I_n) Converge

4) a) $0 \leq t \leq \alpha$ Comme f decroissante Sur $\mathbb{R}$ $f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$

$\iff f^n(\alpha) \leq f^n(t) \leq f^n(0)$

$\int_0^\alpha f^n(\alpha) dt \leq I_n \leq \int_0^\alpha f^n(0)$

$\alpha^n(\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$

Comme $0 < \alpha < 1$ $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

b) On a $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$

Donc $I_2 - I_1 = \frac{1}{1}\left(\alpha^1 - \frac{1}{2^1}\right)$

$I_3 - I_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right)$

$I_4 - I_3 = \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right)$

$\vdots$

$I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$I_n - I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = I_n - (\alpha + \ln(2\alpha))$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{k}\right) = -\alpha - \ln(2\alpha)$

Car $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Bac 2015 Sc

Ahmed/Abdellahi

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x} \right) = 0$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-xe^x}{(e^x)^2} = \frac{-x}{e^x} = -x e^{-x}$$

$f'(x) = 0 \iff -x = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) $F_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n+1}}{e^t}\,dt$

$$\begin{cases} u(x) = (1+t)^{n+1} \\ v'(x) = e^{-t} \end{cases} \iff \begin{cases} u'(x) = (n+1)(1+t)^n \\ v(x) = -e^{-t} \end{cases}$$

$$F_{n+1}(x) = \left[-e^{-t}(1+t)^{n+1} \right]_{-1}^{x} + \int_{-1}^{x} e^{-t}(n+1)(1+t)^n\,dt$$

$$F_{n+1}(x) = -e^{-x}(1+x)^{n+1} + (n+1)\int_{-1}^{x} e^{-t}(1+t)^n\,dt$$

$$F_{n+1}(x) = \frac{-(1+x)^{n+1}}{e^x} + (n+1)\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^n}{e^t}\,dt$$

$$F_{n+1}(x) = -f_{n+1}(x) + (n+1)F_n(x)$$

$$\boxed{F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)}$$

3) a) de l'inegalité precedente on a : pour $x = 0$

$$F_{n+1}(0) = (n+1)F_n(0) - f_{n+1}(0)$$

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{(1+0)^n}{e^0}$$

$\iff I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

b) On a : $-1 \leq t \leq 0$

$t \in [-1, 0] \iff (t+1) \in [0, 1]$

$\iff 0 \leq (t+1)^{n+1} \leq (t+1)^n \leq 1$

$0 \leq (t+1)^{n+1} \leq (t+1)^n$

$0 \leq (t+1)^{n+1} e^{-t} \leq (t+1)^n e^{-t}$

$0 \leq \displaystyle\int_{-1}^{0} (1+t)^{n+1} e^{-t}\,dt \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^{-t}\,dt$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

$\iff I_{n+1} - I_n \leq 0$

$\iff I_n$ est decroissante

* Comme f continue et positive sur $[-1, 0]$ donc I_n positive

$\iff I_n$ decroissante et positive.

D'une part on a :

$I_{n+1} \leq I_n$

$(n+1)I_n - 1 \leq I_n$

$nI_n + I_n - 1 \leq I$

$nI_n \leq 1$

$I_n \leq \dfrac{1}{n}$

D'autre part (I_n) positive

$\iff I_{n+1} \geq 0 \iff$

$(n+1)I_n - 1 \geq 0$

$I_n \geq \dfrac{1}{n+1}$

Donc $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n}$

Bac 2013 Sc

Ahmed / Abdellatif

Ex 3

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim \left(\frac{2\ln x}{\ln x\left(\frac{x^2}{\ln x}-1\right)}\right) = -2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -2$

$\Rightarrow$ f continue en 0^+

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{2\ln x}{x^2-\ln x} - x}{x}\right) = \lim\limits_{0^+}\left(\frac{2x}{x^2-\ln x}\right)$

$= \frac{0}{0-(-\infty)} = 0 \Rightarrow f'_d(0) = 0$

f derivable en 0^+ et C_f admet au point $(0, -2)$ une demi-tangente horizontal.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x^2}\times\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x^2}}\right) = 0$

$\Rightarrow$ $y=0$ A.H au voisinage de $+\infty$

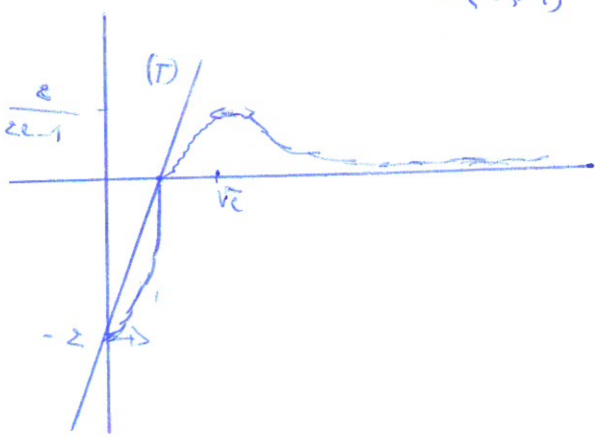
2) a) $f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2-\ln x)-\left(2x-\frac{1}{x}\right)(2\ln x)}{(x^2-\ln x)^2}$

$f'(x) = \frac{2x - \frac{2\ln x - 4x^2\ln x - 2\ln x}{x}}{(x^2-\ln x)^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{e}$ et $f(\sqrt{e}) = \frac{2}{2e-1}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\frac{2}{2e-1}$	$\searrow$	0

b) $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1)$



3) a) $g(t)$ est continue sur $[1, +\infty[$ (produit des fonctions continues)

Donc $F(x) = \int_1^x g(t)\,dt$ est dérivable sur $[1, +\infty[$

$F'(x) = g(x) = xf(x) = \frac{2x\ln x}{x^2-\ln x}$

Comme $x \geq 0$ $xf(x) \geq 0$ donc F croissante

b) $t \geq 0$

$g(t) - \frac{2\ln t}{t} = \frac{2t\ln t}{t^2-\ln t} - \frac{2\ln t}{t}$

$= \frac{2t^2\ln t - 2t^2\ln t + 2\ln t^2}{t(t^2-\ln t)}$

$= \frac{\ln t}{t} f(t) \geq 0$

Car $\forall t \geq 1$ $\frac{\ln t}{t} \geq 0$ et $f(t) \geq 0$

donc $g(t) \geq \frac{2\ln t}{t}$

$F(x) \geq 2\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$

$F(x) \geq 2\left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x$

$F(x) \geq (\ln x)^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \geq \lim\limits_{x\to+\infty}\left((\ln x)^2\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \geq +\infty$

$\iff \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

x	1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Bac 2013 sc

Ahmed | Abdellahi

Ex. 3

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\left(\dfrac{2\ln x}{\ln x\left(\frac{x^2}{\ln x} - 1\right)}\right) = -2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -2 \Rightarrow f$ Continue en 0^+

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\frac{2\ln x}{x^2-\ln x} - x}{x}\right) = \lim\limits_{0^+}\left(\dfrac{2x}{x^2-\ln x}\right)$

$= \dfrac{0}{0-(-\infty)} = 0 \Rightarrow f'_d(0) = 0$

f derivable en 0^+ et C_f admet au point $(0, -2)$ une demi tangente horizontal.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2} \times \dfrac{1}{1-\frac{\ln x}{x^2}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ A.H au voisinage de $+\infty$

2) a) $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}(x^2-\ln x) - (2x - \frac{1}{x})(2\ln x)}{(x^2-\ln x)^2}$

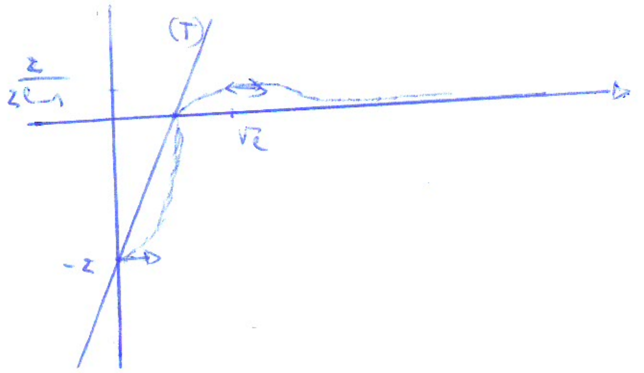
~~$f(x) =$~~ $f'(x) = \dfrac{2x - \frac{2\ln x - 4x^2\ln x - 2\ln x}{x}}{(x^2-\ln x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x(1-2x\ln x)}{(x^2-\ln x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$ et $f(\sqrt{e}) = \dfrac{2}{2e-1}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$\frac{2}{2e-1}$	$\searrow$	0

b) $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x+1)$



3) a) $g(t)$ est Continue Sur $[1, +\infty[$ (produit des fonction continues)

donc $F(x) = \int_1^x g(t)\,dt$ est derivable Sur $[1, +\infty[$

~~Comme $x \geq 0$ $f(x) \geq 0$ donc f croissante~~

$F'(x) = g(x) = x f(x) = \dfrac{2x\ln x}{x^2-\ln x}$

Comme $x \geq 0$ $x f(x) \geq 0$ donc f Croissante

b) $t \geq 1$ $g(t) - \dfrac{2\ln t}{t} = \dfrac{2t\ln t}{t^2-\ln t} - \dfrac{2\ln t}{t}$

$= \dfrac{2t^2\ln t - 2t^2\ln t + 2\ln^2 t}{t(t^2-\ln t)}$

$= \dfrac{\ln t}{t} f(t) \geq 0$

Car $\forall t \geq 1$ $\dfrac{\ln t}{t} \geq 0$ et $f(t) \geq 0$

donc $g(t) \geq \dfrac{2\ln t}{t}$

$F(x) \geq 2\int_1^x \dfrac{\ln t}{t}\,dt$

$F(x) \geq 2\left[\dfrac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x$

$F(x) \geq (\ln x)^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \geq \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \geq +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

x	1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
F	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ex : 2

1) a) $D_g = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2 < 0$ (car $\Delta < 0$)

x	$-\infty$	$+\infty$
g'	$-$	
g	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b) g continue, strictement monotone donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

c) g bijective, g change de signe : $g(0,6) \cdot g(0,7) < 0$, Donc $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$

2) a)
$$f'(x) = \frac{(2e^{-x} - 2xe^{-x})(x^2+2) - 2x(2xe^{-x})}{(x^2+2)^2}$$

$$\Longleftrightarrow f'(x) = \frac{2x^2e^{-x} + 4e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} + 4e^{-x}}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim \left(\frac{e^{-x}}{x^2} \times \frac{2x}{1 + \frac{2}{x^2}}\right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

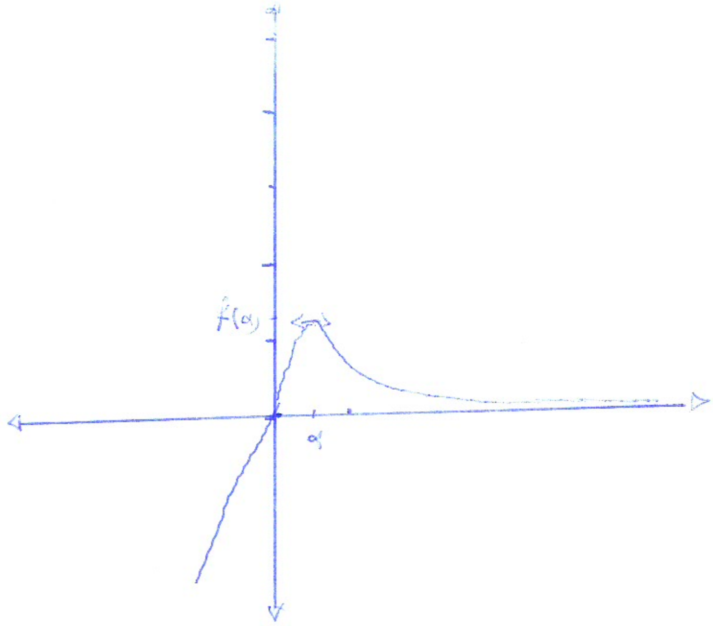
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim \left(e^{-x} \times \frac{2x}{x^2+2}\right) = 0 \times 0 = 0$

Comme $\frac{2e^{-x}}{(x^2+2)^2} > 0$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

c) $\alpha = \frac{0,6 + 0,7}{2} = 0,65$

$f(\alpha) = 0,28$



3) a) $n \geq 1$ $\quad n \leq t \leq n+1$

Comme $n \geq 1$ $\quad t \geq 1 \Longleftrightarrow t^2 \geq t$

$\Longleftrightarrow 0 \leq t \leq t^2 + 2$

$0 \leq \frac{t}{t^2+2} \leq 1$

$0 \leq \frac{te^{-t}}{t^2+2} \leq e^{-t}$

$0 \leq U_n \leq \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1}$

$0 \leq U_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

b) $U_n \leq 10^{-5}$

$\left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n} \leq 10^{-5}$

$e^{-n} \leq \frac{10^{-5}}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}}$

$-n \leq \ln(10^{-5}) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$

$n \geq \ln 10^{5} + \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)e^{-n}$

$n \geq 12$

$\Longleftrightarrow n_0 = 12$

Bac 2011 Sc

Ahmed / Abdellahi

Ex : 2

1) a) $D_g = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2 < 0 \quad (\Delta < 0)$

x	$-\infty$		$+\infty$
g'		$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

b) g continue, strictement monotone donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

c) g bijective, change de signe : $g(0,6) \cdot g(0,7) < 0$, Donc $g(x) = 0$ admet une unique solution $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$

2) a) $f'(x) = \dfrac{(2e^{-x} - 2xe^{-x})(x^2+2) - 2x(2xe^{-x})}{(x^2+2)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x^2e^{-x} + 4e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} + 4e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \left(\dfrac{e^{-x}}{x^2} \times \dfrac{2x}{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

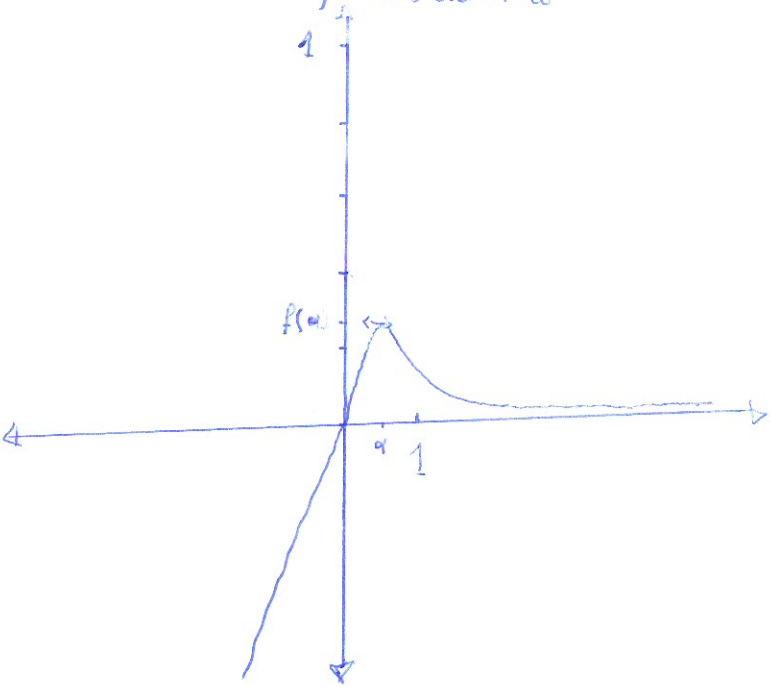
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \left(e^{-x} \times \dfrac{2x}{x^2+2} \right) = 0 \times 0 = 0$

Comme $\dfrac{2e^{-x}}{(x^2+2)^2} > 0$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

c) $\alpha = \dfrac{0,6 + 0,7}{2} = 0,65$

$\Rightarrow f(\alpha) = 0,28$



3) a) $n \geq 1 \qquad n \leq t \leq n+1$

Comme $n \geq 1 \quad t \geq 1 \Leftrightarrow t^2 \geq t$

$\Leftrightarrow 0 < t < t^2 + 1$

$0 \leq \dfrac{t}{t^2+1} \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 < \dfrac{te^{-t}}{t^2+1} \leq e^{-t}$

$0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-t}\,dt$

$0 \leq u_n \leq [-e^{-t}]_n^{n+1}$

$0 \leq u_n \leq \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) e^{-n}$

$\Leftarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

b) $u_n \leq 10^{-5}$

$\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) e^{-n} \leq 10^{-5}$

$e^{-n} \leq \dfrac{10^{-5}}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$

$-n \leq \ln 10^{-5} - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

$n \geq \ln 10^{5} + \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

$n \geq 12$

$\Leftrightarrow n_0 = 12$

Bac 2015 SC

Ahmed/Abdellahi

Ex : 2 (Nombres Complexes)

1) $P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (1+20i)z + 14 - 5i$

a) $P(i) = i^3 - (6+5i)(i)^2 + (1+20i)(i) + 14 - 5i$

$P(i) = -i + 6 + 5i + i - 20 + 14 - 5i = 0$

$\Longleftrightarrow \boxed{P(i) = 0}$

$P(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$

On utilise le T.H

	1	$-(6+5i)$	$1+20i$	$14-5i$
i		i	$-6i+4$	$-14+5i$
	1	$-6-4i$	$5+14i$	0

$\Longleftrightarrow P(z) = (z-i)(z^2 - (6+4i)z + 5 + 14i)$

$P(z) = 0 \Longleftrightarrow$

$z - i = 0$ ou $z^2 - (6+4i)z + 5 + 14i = 0$

$\Longleftrightarrow \boxed{z = i}$

$\Longleftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$\Longleftrightarrow \Delta = (-(6+4i))^2 - 4(5+14i)$

$\Delta = 20 + 48i - 20 - 56i$

$\Delta = -8i = (-2+2i)^2$

$\boxed{z' = 4+i}$ et $\boxed{z'' = 2+3i}$

2) $z_A = z$, $z_B = z'$, $z_C = z''$

$B \xrightarrow{S} C$ et $S(A) = A$

a) $z' = az + b$

$a = \dfrac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Et $b = z_A(1-a)$

$\Longleftrightarrow b = i\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$\Longleftrightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\Longleftrightarrow$ l'expression Complexe de S est : $\boxed{z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$

b) $S(A\,;\ \alpha\,;\ k)$

$k = |a| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = \arg a = \dfrac{\pi}{4}$

3) a) $M \in \Gamma_1 \Longleftrightarrow$

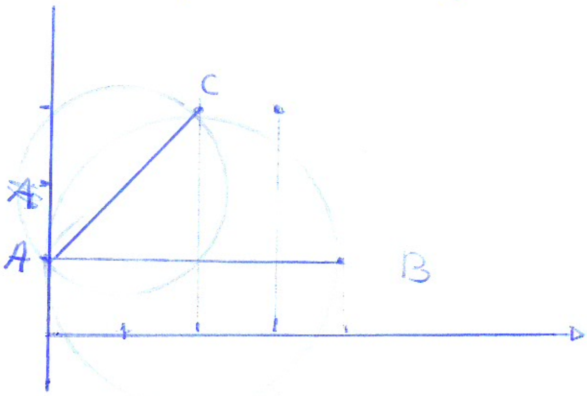
$\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est imaginaire pure

$\Longleftrightarrow \Gamma_1$: Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

$M \in \Gamma_2 \Longleftrightarrow$

$\dfrac{z - z_A}{z - z_C}$ est imaginaire pure

$\Longleftrightarrow \Gamma_2$: Cercle de diamètre $[AC]$ privé de A et C



b) $S(\Gamma_1) = S(\mathcal{C}_1)$ = Cercle de diamètre $S[AB] = \cancel{S}[AC]$

$\Longleftrightarrow S(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$

$\Longleftrightarrow S(\Gamma_1) = \Gamma_2$

Bac 2015 Sc

Ahmed / Abdellahi

Ex : 2 (Nombres Complexes)

1) $P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (1+20i)z + 14 - 5i$

a) $P(i) = i^3 - (6+5i)(i)^2 + (1+20i)(i) + 14 - 5i$

$\Leftrightarrow P(i) = -i + 6 + 5i + i - 20 + 14 - 5i = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{P(i) = 0}$

$P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

On utilise le T.H :

	1	$-(6+5i)$	$1+20i$	$14-5i$
i		i	$-6i+4$	$5i-14$
	1	$-6-4i$	$5+14i$	0

$\Leftrightarrow P(z) = (z-i)(z^2 - (6+4i)z + 5 + 14i)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - i = 0 \Leftrightarrow z = i$

ou $z^2 - (6+4i)z + 5 + 14i = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = (-(6+4i))^2 - 4(5+14i)$

$\Leftrightarrow \Delta = 20 + 48i - 20 - 56i$

$\Leftrightarrow \Delta = -8i = (-2+2i)^2$

$\Leftrightarrow \boxed{z' = 4+i}$ et $\boxed{z'' = 2+3i}$

2) $z_A = z$; $z_B = z'$; $z_C = z''$

a) $z' = az + b$

$S : B \longrightarrow C$ et $S(A) = A$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Et $b = z_A(1-a)$

$\Leftrightarrow b = i\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Donc l'expression complexe de S est : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $S(A, \alpha, k)$

$k = |a| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

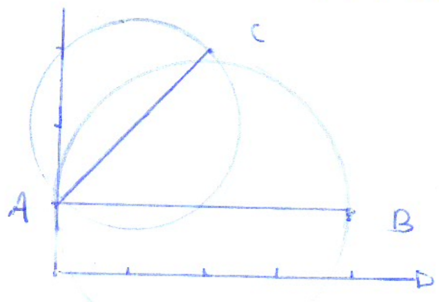
$\alpha = \arg a = \dfrac{\pi}{4}$

3) a) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ est imaginaire pure

$\Leftrightarrow \Gamma_1$: Cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [AB] privé de A et B

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \dfrac{z - z_A}{z - z_C}$ est imaginaire pure

$\Leftrightarrow \Gamma_2$: Cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre [AC] privé de A et C



b) Comme $S(A) = A$ et $S(B) = C$

$S(\Gamma_1) = S(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2 = \Gamma_2$

$\Leftrightarrow \boxed{S(\Gamma_1) = \Gamma_2}$