Habiboullah/yowbe
N° 1997 Classe $7^{ème}$ C.
Ecole ERRAJA
Bac 2015 S.N.
Exercice 04:

1) $g(x) = \dfrac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

a) $g(x) = \dfrac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x(x^2-4x+5)}$

tableau d'hronère

	3	−12	19	−10
1	↓	3	−9	10
	3	−9	10	0

$g(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2-9x+10)}{x(x^2-4x+5)}$

$a = 3$. $b = -9$, $c = 10$

) le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
les descriminants de trinôme
$3x^2 - 9x + 10 > 0$ donc le signe
$\Delta = 81 - 112 < 0$ et negatifs.
$x^2 - 4x + 5 > 0 \Rightarrow$
$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$
donc le signe depend le $\dfrac{x-1}{x}$.
$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ et $x = 0$

x	$-\infty$ 0		1 $+\infty$
x	−	+	+
$x-1$	−	−	+
$\frac{x-1}{x}$	+	−	+
$g(x)$	+	−	+

2) a) on a : $\lim\limits_{x\to 0}(3x-3) = -3$ et $\lim\limits_{0^+} \dfrac{x^2-4x}{x^2} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

$x = 0$ AV

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right) = 0$ Donc

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-3) = -\infty$

c) d'apre 2,a) la courbe (C) admet un asymptote verticale de $x = 0$

donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (3x-3)) = \lim\left(\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)\right) = 0$

donc la courbe (C) admet un AO d'equation $y = 3x - 3$

Pour etudiee la position relative de (C) et (D) on etudie le signe

on pose $d(x) = f(x) - y = f(x) - (3x-3)$

on d'abord le signe de $\ln t$ et celui de signe de $t - 1$ pour toute $t > 0$

$d(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$ et celui $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2} - 1$

Par reduction de m dénominateure.

$\dfrac{x^2-4x+5}{x^2} - 1 = \dfrac{x^2-4x+5-x^2}{x^2} = \dfrac{-4x+5}{x^2}$

donc le signe de $d(x)$ et celui de $-4x+5$
Car $x^2 > 0$.

$-4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow d\left(\frac{5}{4}\right) = 3\left(\frac{5}{4}\right) - 3 = \frac{3}{4}$

Alors le Asymptote Des... la courbe (C)

x	$-\infty$	0	$5/4$	$+\infty$
$-4x+5$	$+$	$+$	$-$	
$d(x)$	$+$	$+$	$-$	
PR	C/D	C/D	D/C	

3,a) on peut écrire $f(x)$ sous forme

$$f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2-4x+5) - \ln(x^2)$$

$$f(x) = 3x-3+\ln(x^2-4x+5) - 2\ln x.$$

$$f'(x) = 3 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{2}{x}.$$

$$f'(x) = 3 + \frac{(2x-4)x - 2(x^2-4x+5)}{x(x^2-4x+5)}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2-4x+5)x + 2x^2-4x-2x^2+8x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^3-4x^2+5x)+\cancel{2x^2}-4x-\cancel{2x^2}+8x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3-12x^2+15x+4x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$f'(x) = g(x)$ $\quad f(1) = \ln 2.$

T.V de f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow$	$\ln 2 \nearrow +\infty$	

b) f est une fonction continue seulement sur l'intervalle $]-\infty,0[$ et monotone et change le signe car $0 \in f(]-\infty,+\infty[)$ Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans cet intervalle.

Pour encadrer α : $\begin{cases} f(-1) = -6+\ln 10 < 0 \\ \Rightarrow -1 < \alpha < 0. \end{cases}$

$f(-0,5) = -4,5 + \ln 29 < 0$

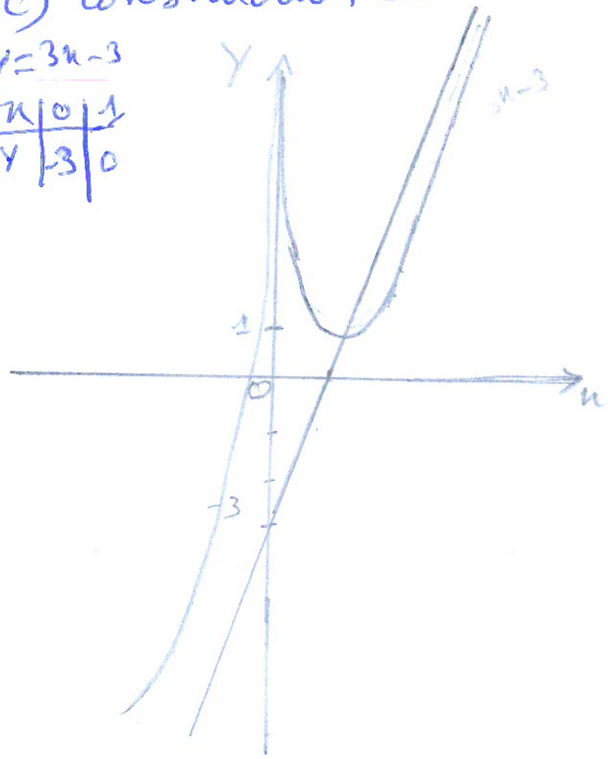
$\Rightarrow -0,5 < \alpha < 0$

C'est l'encadrement de α d'amplitude de 5×10^{-1}

c) Construction de courbe (C)

$y = 3x-3$

x	0	1
y	-3	0



4,a) on a : $2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right) =$

$$2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x^2-4x+4+1}\right)$$

$$2\left(1 + \frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right) = 2\left(\frac{x^2-4x+\cancel{5}+2x-\cancel{5}}{x^2-4x+5}\right)$$

alors $2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right) = \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$

$$2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right) = \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$$

b) $A = \int_3^{2+\sqrt3} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx = \left[\ln|x^2-4x+5|\right]_3^{2+\sqrt3}$

$A = \ln|(2+\sqrt3)^2 - 4(2+\sqrt3)+5| - \ln|(3)^2-4(3)+5|$

$= \ln 4 - \ln 2 = \ln 2.$

$$\boxed{A = \ln 2}$$

c) En posant $x = 2+\tan t$ et $t \in [0; \frac{\pi}{2}[$

$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow 2+\tan t = 3 \Rightarrow \tan t = 1 \\ \quad t = \frac{\pi}{4} \\ 2+\sqrt3 = 2+\tan t \Rightarrow \tan t = \sqrt3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$x = 2+\tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)\,dt$

$\Rightarrow x = 2+\tan t \Rightarrow (1+(x-2)^2) = 1+\tan^2 t$

$B = \int_3^{2+\sqrt3} \frac{1}{(1+(x-2)^2)}\,dx$ on peut remplace avec changement de variable.

$\int_3^{2+3} \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cancel{1+\tan^2 t}}\cancel{(1+\tan^2 t)}\,dt$

$\int_3^{2+\sqrt3} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dt = [t]_{\pi/4}^{\pi/3} = \pi/12$

donc $\boxed{B = \frac{\pi}{12}}$

d) on calcule $J = \int_3^{2+\sqrt3} \ln(x^2-4x+5)\,dx$

Par IPP on pose

$\begin{cases} u(x) = \ln(x^2-4x+5) \Rightarrow u'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x. \end{cases}$

Alors

$J = \left[x\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt3} - \int_3^{2+\sqrt3} \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}\,dx$

on remplace le première partie par l'équivalence de 4, a)

$J = (2+\sqrt3)\ln|(2+\sqrt3)^2-4(2+\sqrt3)+5| - 3\ln(3^2-4\times3+5) - \int_3^{2+\sqrt3} \frac{2x^2-4x+\cancel{5}}{x^2-4x+5}\,dx$

$J = (2+\sqrt3)\ln 4 - 3\ln 2 - 2\left(\int_3^{2+\sqrt3} \left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)dx\right)$

$J = 2+\sqrt3 \ln 4 - 3\ln 2 - 2\int_3^{2+\sqrt3} dx + \int_3^{2+\sqrt3} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx - \int_3^{2+\sqrt3} \frac{1}{1+(x-2)^2}\,dx$

d'après le question 4-b et 4c

$J = (2+\sqrt3)\ln 2^2 - 3\ln 2 - \left([x]_3^{2+\sqrt3} + A - B\right)$

$J = (2+\sqrt3)\ln 2 - 3\ln 2 - 2(2+\sqrt3 - 3 + \ln 2 - \ldots$

$J = (1+2\sqrt3)\ln 2 - 2\left(-1+\sqrt3+\ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$

$J = (1+2\sqrt3)\ln 2 + 2 - 2\sqrt3 - 2\ln 2 + \pi/6$

$J = (-1+2\sqrt3)\ln 2 + 2 - 2\sqrt3 + \pi/6$

$$\boxed{J = (-1+2\sqrt3)\ln 2 + 2(1-\sqrt3) + \pi/6}$$

$K = 2\int_2^{2+\sqrt3} \ln x\,dx$ a l'aide de l'intégration par parties.

$\begin{cases} u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}. \\ v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x. \end{cases}$

$K = [x\ln x]_2^{2+\sqrt3} - \int_2^{2+\sqrt3} \frac{1}{x}\times x\,dx$

$K = 2\left[(x\ln x) - x\right]_2^{2+\sqrt3}$

$K = 2\left((2+\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) - (2+\sqrt3) - 3\ln 3 + 3\right)$

$K = 2\left((2+\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) + 1 - \sqrt3 - 3\ln 3\right)$

$K = (4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) + 2 - 2\sqrt3 - 6\ln 3$

$K = (4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) + 2(1-\sqrt3) - 6\ln 3$

$K = (4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3) - 2(1-\sqrt3-3\ln 3$

calcule l'aire du domain de limité par la courbe (c) et les droite d'equation $y=3x-3$ on a $x\geq 3$ d'equation $y=3x-3$ et

$x=3$ et $x=2+\sqrt{3}$

$$S=\int_3^{2+\sqrt{3}}(y-f(x)) = \int_3^{2+\sqrt{3}} -\ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}dx\right)$$

$$=-\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)dx$$

$$=-\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2-4x+5)dx+\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2)dx.$$

donc $S=-J+K$

$$S=-\left[(-1+2\sqrt{3})\ln 2+2-2\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$+(4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+2-2\sqrt{3}-6\ln 3]$$

$$S=(1-2\sqrt{3})\ln 2-2+2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}+$$

$$(4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}-6\ln 3)$$

$$\boxed{S=(1-2\sqrt{3})\ln 2+(4+2\sqrt{3})\ln(4+2\sqrt{3}) -6\ln 3-\frac{\pi}{6}\ \text{Ua.}}$$

Habiboullah / yoube
classe 7ème CN 1997 Ecole ERRAJA,

Exercice 01 : Bac 2012 SN

$f(x) = e^x \ln(e^x+1)$

1) Justifier $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim (e^x \ln(e^x+1))$

$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim e^x \ln(e^x+1) = +\infty \end{cases}$

Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} \ln(e^x+1) = +\infty \times +\infty = +\infty$

$y=0$ A H de voisinage $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe c admet une branche Parabolique de direction (oy) au voisinage $(+\infty)$

2(a)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x \ln(e^x+1) + \frac{e^x}{e^x+1} \cdot e^x$

$f'(x) = e^x \ln(e^x+1) + \frac{e^{2x}}{e^x+1} > 0$

$e^x > 0 \Rightarrow e^x+1 > 1 \Rightarrow \ln(e^x+1) > 0$

T.d.f $\Rightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

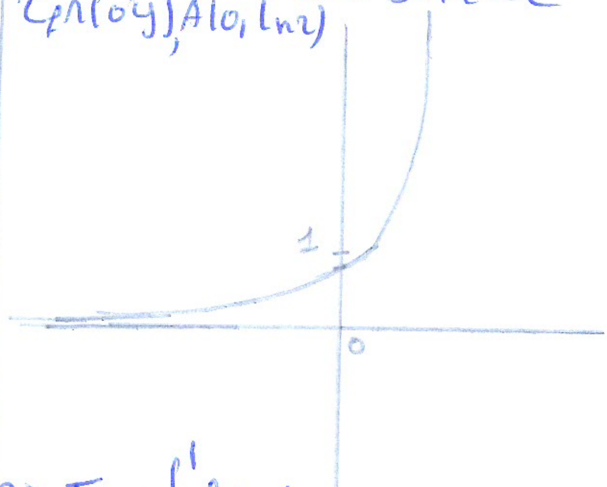
b) f est continue sur $\mathbb{R}$,

- f est strictement croissant sur $\mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$ et vers $J =]0,+\infty[$

$C_f \cap (o'y)$, $A(0, \ln 2)$



2) $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Methode a : on utilise un Identification pour determiner le reels a b et c

$f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}$

$f(x) \cancel{*} ae^x + b + \frac{c}{1+e^x} \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{ae^{2x} + ae^x + be^x + b + c}{1+e^x} + f(x)$

$f'(x) = f(x) + \frac{ae^{2x} + (a+b)e^x + b + c}{1+e^x}$

Par Identification

$\begin{cases} a = 1 \\ \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow b = -a = 1 \quad b = -1 \\ b + c = 0 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$

$f'(x) = f(x) + e^x - 1 + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f'(x) - e^x + 1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$I = \int_0^1 \left(f(x) - e^x + 1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx$

$I = \left[f(x) - e^x + x + \ln(e^{-x}+1) \right]_0^1$

$I = f(1) - e + 1 + \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) - f(0)$

$- e + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$

$I = e\ln(e+1) - e + 1 + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$

$- \ln 2 + 1 - \ln 2$

$$\boxed{I = (e+1)\ln(e+1) - e + 1 - 2\ln 2}$$

methode b : on posant $t = e^x + 1$

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2. \\ x = 1 \Rightarrow t = e+1 \end{cases}$

$\Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t-1}$

donc $I = \int_2^{e+1} (t-1)\ln t \cdot \frac{dt}{t-1}$

$I = \int_2^{e+1} \ln t \cdot dt$

Par Integration par Partie

$\begin{cases} u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 \Rightarrow v(t) = t \end{cases}$

$I = \left[t\ln t \right]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} dt$

ou $I = \left[t\ln t \right]_2^{e+1} - \left[t \right]_2^{e+1}$

$I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 - (e+1) + 2$

$I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e - 1 + 2$

$I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 + 1 - e.$

$$\boxed{I = (e+1)\ln(e+1) - e + 1 - 2\ln 2}$$

Habiboullah Ayowbe
N°: 1997
classe $7^{ème}$ C   Ecole ERRAJA
Exercice 02 : Bac 2014 SN

$f(x) = xe^x$. $x \in]-\infty, +\infty[$

1-a) Dresse TV

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty e^{+\infty} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x) = -\infty e^{-\infty} = -\infty \times 0^+$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $Y=0$ AH de voisinage $-\infty$

$f'(x) = e^x + e^x x = (1+x)e^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1+x = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) le courbe : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{xe^x}{x} = +\infty$

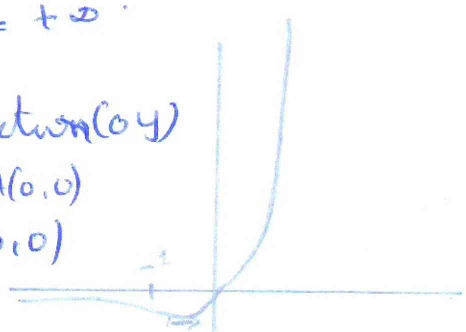
$Y=0$ AH de voisinage $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

B de direction (oy)

$\cap$ (ox) A(0,0)

$\cap$ (oy) (0,0)



$f''(x) = e^x + e^x(1+x) = e^x + e^x + xe^x$.

$f''(x) = (x+2)e^x$.

$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) =$
$e^x(x+2) - 2(1+x)e^x + xe^x = 0$
$xe^x + 2e^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x = 0$

donc f est un solution de l'équation différentielle

d) l'aire du domaine du plan à l'axe des abscisse d'équation $x=0$ et $x=1$

$A = \int_0^1 xe^x dx$, Par Integration Par Partie

$\begin{cases} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$.

$A = [xe^x - e^x]_0^1 = e - e + e^0 = 1$

$\boxed{A = 1 \text{ u.a}}$

2) $n \geq 1$ $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Calcule I_1 : $= -\int_0^1 xe^x dx$.

$I_1 = -[xe^x - e^x]_0^1 = -e + o - o - 1$

$\boxed{I_1 = -1 = -A}$

b) $n \geq 1$ $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$x^n \leq x^n e^x \leq e x^n \Rightarrow \int_0^1 x^n \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \int_0^1 x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx \Rightarrow |I_n| = \int_0^1 x^n e^x dx$

$\int_0^1 x^n \leq |I_n| \leq \int_0^1 e x^n dx$

$\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq \left[\frac{e}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1$

$\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ d'après TG

$\lim I_n = 0$

(1)

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx.$

IPP

$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1) x^n \\ v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \left[x^{n+1} e^x \right]_0^1 - (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x \, dx.$

$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e - (n+1) I_n}$

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 6)e^x}{x+1} \, dx.$

$(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)$ pour $x = -1$

$-1 + 4(-1)^2 - 3(-1) - 6 = 0$

$J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)e^x}{(x+1)} \, dx.$

x	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$J = \int_0^1 \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 + 3x - 6)e^x}{\cancel{(x+1)}} \, dx.$

$J = \int_0^1 (x^2 + 3x - 6) e^x \, dx.$

$J = \int_0^1 (x^2 e^x + 3x e^x - 6 e^x) dx$

$= \int_0^1 x^2 e^x + 3 \int_0^1 x e^x - 6 \int_0^1 e^x \, dx.$

$I_2 - 3 I_1 - 6 \int_0^1 e^x \, dx$

$I_2 = \int_0^1 x^2 e^x \, dx.$ avec $I_1 = -1$

$\begin{cases} u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x. \\ v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x. \end{cases}$

$I_2 = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x.$

$= e + 2 I_1 = e - 2.$

$\Rightarrow J = (e-2) - (3(-1)) - 6(e-1)$

$\boxed{J = e - 5e}$ $= e - 2 + 3 - 6e + 6 = 7 - 5e$

2

habiboullah/yoube
N° 1997 classe 7ème C École ERRAJA.

Exercice 1 : Bac 2016 SC.

$P(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + 2iz + 6 - 2i$

1-a) $P(1-i) =$

$(1-i)^3 - (1+3i)(1-i)^2 + 2i(1-i) + 6 - 2i =$

$(1-i)^2\left[(1-i) - (1+3i)\right] + 2i(1-i) + 6 - 2i =$

$-2i(-4i) + \cancel{2i} + 2 + 6 - \cancel{2i}$

$= -8 + 8 = 0$

$P(1-i) = 0$

b) Tableau d'Horner.

	1	$-1-3i$	$2i$	$6-2i$
$1-i$	$\downarrow$	$1-i$	$-4i-4$	$-6+2i$
	1	$-4i$	$-2i-4$	0

$P(z) = (z-1+i)(z^2 - 4iz - 4 - 2i)$

$\begin{cases} z-1+i = 0 \Rightarrow z = 1-i \\ z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0 \end{cases}$

$\Delta = (4i)^2 - 4(-4-2i)$

$-16 + 16 + 8i = (2+2i)^2 = 8i$

$\sqrt{\Delta} = 2+2i$

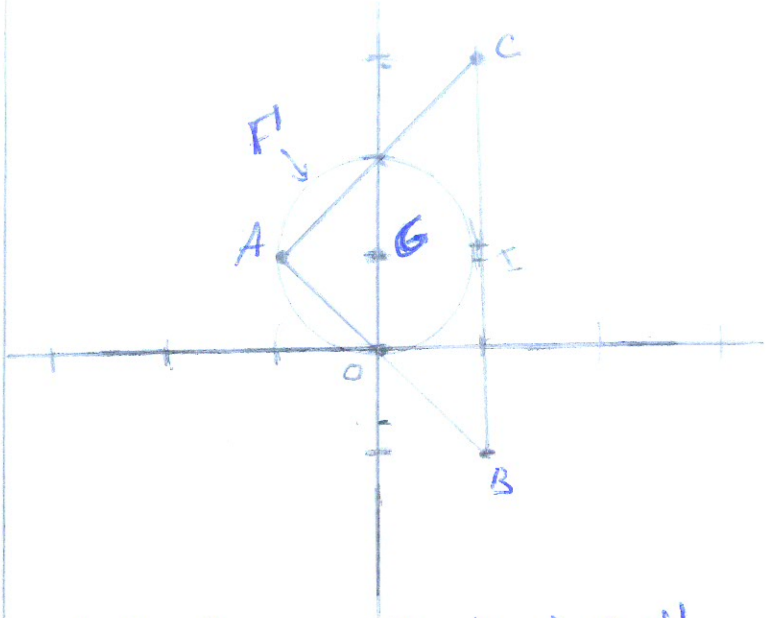
$z_1 = \dfrac{4i+2+2i}{2} = \dfrac{6i+2}{2} = 1+3i$

$z_2 = \dfrac{4-2-2i}{2} = 1-i$

2) $z_A = -1+i$, $z_B = 1-i$

$z_C = 1+3i$

a) les pts A, B et C dans le figure.



$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |1-i+1-i| = |2-2i|^2 = 8$

$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |1+3i+1-i|^2$

$= |2+2i|^2 = 8$

$AB^2 + AC^2 = 16$.

$BC^2 = |z_C - z_B|^2 = |1+3i-1+i|^2$

$= |4i|^2 = 16$.

$AB^2 + AC^2 = BC^2$.

le triangle est rectangle en A.

b) $z_G = \dfrac{2z_A + z_B + z_C}{4}$

$z_G = \dfrac{-2+2i+1-i+1+3i}{4} =$

$\dfrac{2-2+4i}{4} = i$ $\boxed{z_G = i}$

c) Γ : $M \in \Gamma \Leftrightarrow 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16$.

$4MG^2 + f(G) = 16$.

$f(G) = 2GA^2 + GB^2 + GC^2 =$

$= |z_A - z_G|^2 2 + |z_B - z_G|^2 + |z_C - z_G|^2$

$= |-1+i-i|^2 2 + |1-i-i|^2 + |1+3i-i|^2$

$2 + |1-2i|^2 + |1+2i|^2$

$2 + (5) + (5) = 12 \Rightarrow f(G) = 12$

$\Rightarrow 4MG^2+12=16$

$4MG^2=16-12 \Rightarrow 4MG^2=4$

$\Rightarrow MG^2=1 \Rightarrow MG=1$

$\Rightarrow \Gamma$: cercle de centre G et de rayon 1

d) Δ : $-2MA^2+MB^2+MC^2=16$

soite I milieu de [BC]

alors $MB^2+MC^2=$

$(MI+MB)^2+(MI+MC)^2$

$2MI^2+IB^2+IC^2+2MI(\underbrace{IB+IC}_{0})$

$=2MI^2+BC^2$

avec $BC^2=|1+3i-1+i|^2=4$

$-2MA^2+2MI^2+4=2(MI^2-MA^2)+4$

$2(MI-MA)(MI+MA)+4$

$2\,AI\,2(MI+MA)+4$

Soite J milieu de AI

$4AI\cdot 2MJ+4=8AI*MJ+4$

$8AI*MJ+4=16 \Rightarrow 8AI*MJ=16-4$

$\Rightarrow 8AI\cdot MJ=12 \Rightarrow AI\cdot MJ=\frac{12}{8}=\frac{3}{4}$

Δ et la droite passan par A perpendiculaire de BC sur H

3) S: $C \longrightarrow C$

$A \longrightarrow B$

$$\begin{cases} Z_C=aZ_C+b \\ Z_B=aZ_A+b \end{cases} \Rightarrow Z_C-Z_B=a(Z_C-Z_A)$$

$\Rightarrow a=\frac{Z_C-Z_B}{Z_C-Z_A}$

$= a=\frac{1+3i-1+i}{1+3i+1-i}=\frac{4i}{2+2i}=\frac{4i(2-2i)}{8}$

$=\frac{8+8i}{8}=\frac{8(1+i)}{8}=1+i$

$b=(1-a)Z_C=(1-1-i)(1+3i)$

$=(-i)(1+3i)=3-i$

$Z'=(1+i)Z+3-i$

b) le rapport $k=|a|=|1+i|=\sqrt{2}$

d angle $\arg(a)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

la Similitude

$\boxed{S(c,\sqrt{2},\frac{\pi}{4})}$

Habiboullah /youbé
N°1997
classe 7ème C Ecole ERRAJA.

Exercice 04 Bac 2013. SN

$\begin{cases} g(x) = 1+x^3 - 3x^3\ln x & \text{si } x>0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1-a) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}(1+x^3-3x^3\ln x)$

$1+0-3\times 0 = 1 = g(0)$

donc g est continue en 0

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim (1+x^3-3x^3\ln x)$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(x^3(1-\frac{1}{x^3}-3\ln x)\right)$

$+\infty(1-0-\infty) = -\infty$

) $g'(x) = 3x^2 - 9x^2\ln x - \frac{1}{x}\times 3x^3$

$= 3x^2 - 3x^2 - 9x^2\ln x$

$g'(x) = -9x^2\ln x$, $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Tableau de signe avec T.V.

x	0		1		$+\infty$
$9x^2$		$-$		$-$	
$\ln x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

g est continue et strictement croissant sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et change le signe, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution $\alpha>1$ comme $g(1)=2>0$ et $g(2)=9-24\ln 2<0$

alors $1<\alpha<2$ pour $1<x<\alpha \Rightarrow g(x)>g(\alpha) \Rightarrow$ ou $g(x)<g(\alpha)=0$

donc

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2) $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^3}$ $x>0$

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\left(\frac{\ln x}{1+x^3}\right) =$

$\lim \frac{\ln x}{x}\left(\frac{x}{1+x^3}\right)$

$= 0\times 0 = 0$

car $\lim \frac{x}{1+x^3} = l\,\frac{x}{x^3} = l\,\frac{1}{x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^3) - 3x^2\ln x}{(1+x^3)^2}$

$f'(x) = \frac{\frac{1+x^3-3x^2\ln x}{x}}{(1+x^3)^2}$

$f'(x) = \frac{1+x^3-3x^3\ln x}{x(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$

T.V de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3-a) $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

a) f est continue sur $[1,+\infty[$ donc elle admet un primitive et dérivable sur $[1,+\infty[$.

$F(x) = H(x) - H(1)$

Donc F est dérivable $\Rightarrow$

$F'(x) = H'(x) - 0 = f(x)$

Pour tout $x>1$ $f(x)>0$ donc F est croissante.

T.V de F

x	0		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	

b) $t>1$ pour on a $t^3 < 1+t^3 < (1+t)^3$.

car $(1+t)^3 = 1+3t+3t^2+t^3 > t^3$

$\frac{1}{(1+t)^3} < \frac{1}{1+t^3} < \frac{1}{t^3}$ pour $t>1$

donc $\frac{\ln t}{(1+t)^3} < \frac{\ln t}{1+t^3} < \frac{\ln t}{t^3}$ $\ln t>0$

$\Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^3} < f(t) < \frac{\ln t}{t^3}$

c) Calcule $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}$ Par IPP

$\begin{cases} u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{t^3} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{2t^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt =$

$\left[-\frac{\ln t}{2t^2}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t}\times\frac{1}{2t^2}\,dt$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t^3}\,dt$

$-\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)$

$\int^x \ln t$ [illegible]

b) $\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$

$\frac{a(1+t)^2}{t(1+t)^2} + \frac{bt(1+t)}{t(1+t)^2} + \frac{ct}{t(1+t)^2}$

$= \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{t(1+t)^2}$

Par Identification

$\begin{cases} a+b=0 \Rightarrow a=-b \\ 2a+b+c=0 \\ \Rightarrow a=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$

1-a) on a :

$\frac{\ln t}{(1+t)^3} \le f(t) \le \frac{\ln t}{t^3}$.

$\Rightarrow \int_1^n \frac{\ln t}{(1+t)^3} \le \int_1^n f(t)\,dt \le \int_1^n \frac{\ln t}{t^3}\,dt$

on pose $k = \int_1^n \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$

Calcule k.

$\begin{cases} u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^3} \Rightarrow v(t) = \frac{-1}{2(1+t)^2} \end{cases}$

$\left[\frac{-\ln t}{2(1+t)^2}\right]_1^n + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{t} \times \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$

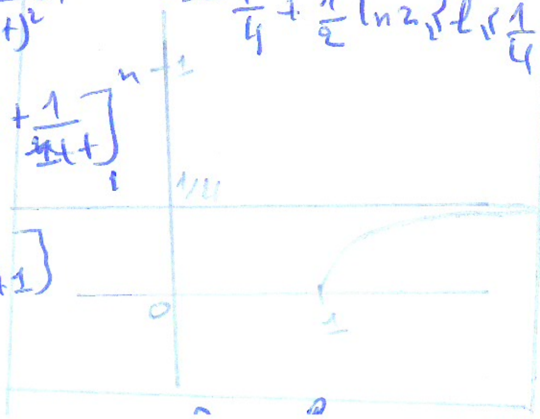
$-\frac{\ln n}{2(1+n)^2} + \frac{1}{2}\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$

$\frac{\ln n}{(1+n)^2} + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$

$\frac{\ln n}{(1+n)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln t - \ln(1+t) + \frac{1}{1+t}\right]_1^n$

$\frac{\ln n}{(1+n)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}\right]$

$- \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$



$= -\frac{\ln n}{2(1+n)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$

$= -\frac{\ln n}{2(1+n)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2\ln 2 - 1}{4}$

Donc on remplace dans les integrale

$\int_1^n \frac{\ln t}{t^3}\,dt$ et $k = \int_1^n \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$

$= -\frac{\ln n}{2(1+n)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \le$

$F(n) \le \frac{1}{4} - \frac{1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2}$.

$\lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln n}{2(1+n^2)} = \lim \frac{\ln n}{n} \times \frac{n}{(1+n)^2}$

$= 0 \times 0 = 0$

car $\lim \frac{n}{2(1+n)^2} = \lim \frac{n}{2n^2} = 0$

et $\lim \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$

donc $-\frac{1-2\ln n}{4} \le \ell \le \frac{1}{4}$

$-1+0-0$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \le \ell \le \frac{1}{4}$