Nom : N'Guiya / Habib
N° : 1061
Classe : 7°C

BAC : 2014

SN :

Exercice (1) : on a : $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$

1) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= \cancel{-8i} \cancel{-4} + \cancel{8i} + \cancel{2i} + \cancel{4} - \cancel{2i} = 0$

$\therefore P(2i) = 0$

	1	1 - 2i	1 - 2i	- 2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\therefore \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Rightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0 \Rightarrow z = 2i$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$

$Im(2i) \geq Im\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore z_0 = 2i$; $z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a)- on a : $B\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $C\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x,y)$:

$M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\vec{BM},\vec{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2x+1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B,C\}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}+iy \,/\, y \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

or : $z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

D'ou : $z' = \frac{1}{(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2+\frac{3}{4}}$

$\frac{1}{-y^2+\frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$

Donc : M' est sur l'axe des abscisses

) a)- $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2+\bar{z}z+\bar{z}}$

Donc : Si $(z) = 1$, alors : $|z|^2 = 1$

d'où : $f(z) = \frac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

) Si $z = e^{i\theta}$, alors :

$\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc : $f(z) = \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

) a)- $M \in \mathcal{E}(0,1)\setminus\{B,C\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$ et

$\Rightarrow z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2 = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\frac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta}-1\right)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2 = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$

D'où : $x'^2+y'^2 = (2x'-1)^2$

b) $\Gamma : x^2+y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3(x^2-\frac{4}{3}x)-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left[(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9})-\frac{4}{9}\right]-y^2 = -$

$\Leftrightarrow 3(x-\frac{2}{3})^2-y^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{3(x-\frac{2}{3})^2}{\frac{1}{3}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

$\Gamma : \frac{(x-\frac{2}{3})^2}{(\frac{1}{3})^2} - \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = 1$

$\Gamma : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ avec : $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$, **Donc :** Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3},0\right)$ et de sommets

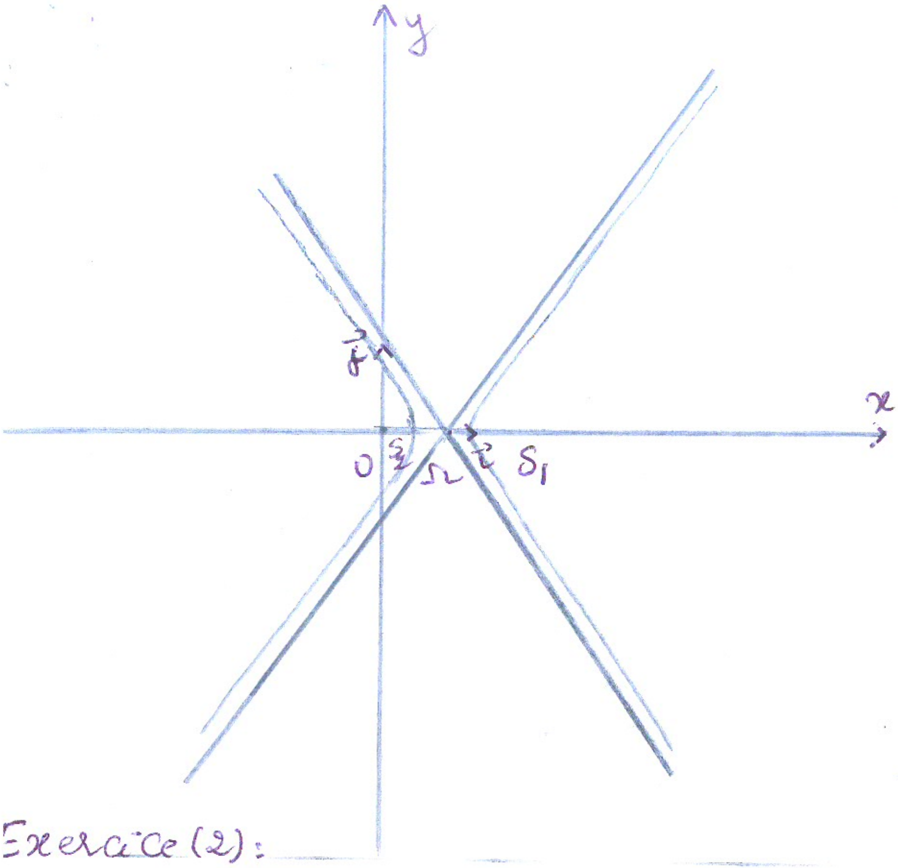
$S_1 : \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3};0\right) = (1,0)$ et

$S_2 : \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3};0\right) = \left(\frac{1}{3},0\right)$

dans la repére $(0,\vec{u},\vec{v})$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \boxed{e = 2}$.

Construction de Γ dans le repere précédent :



Exercice (2):

) on a : $f(x) = xe^{x}$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

' est continue et derivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

$\lim\limits_{\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = +\infty$

$f'(x) = e^{x} + xe^{x} = (x+1)e^{x}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \iff x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

Tableau de variat° de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

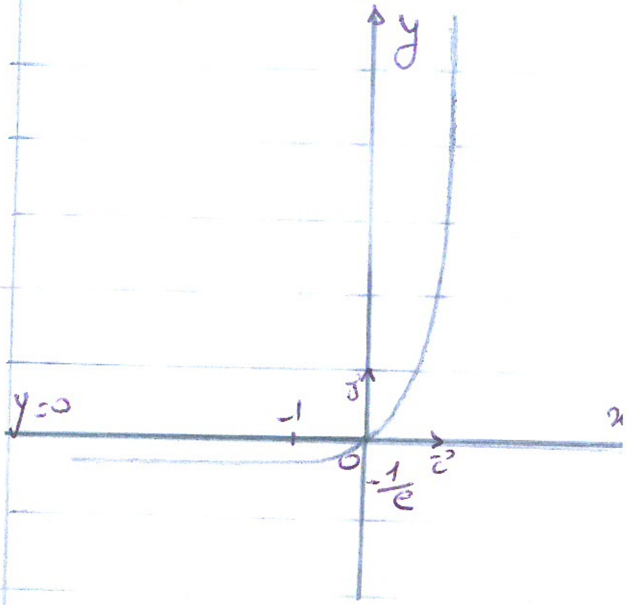
* $y = 0$: A.H. à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

(C) admet une B.P // $(y'y)$ au

× $\in \cap (y'y) : (0,0)$

× $\in \cap (x'x) : (0,0)$



c) $f(x) = xe^{x}$

$f'(x) = (x+1)e^{x}$

$f''(x) = (x+2)e^{x}$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^{x} - 2(x+1)e^{x} + xe^{x}$

$= (x+2-2x-2+x)e^{x} = 0$

Donc : f est une solution de l'équat° différentielle $y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droits d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

or : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

D'où : $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^{x}\,dx$

on pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{x} \end{cases}$ alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{x} \end{cases}$

$\therefore A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$

$= [(x-1)e^x]_0^1$

$A = 1$

2) a)- $I_1 = (-1)^1 . \int_0^1 xe^x\,dx$

or: $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$

D'où : $\boxed{I_1 = -1}$.

b) $I_n = (-1)^n . \int_0^1 x^n e^x\,dx$

Donc : $|I_n| = |(-1)^n| . \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

or : $\forall x \in [0,1]$, $x^n e^x \geq 0$

D'où : $\int_0^1 x^n e^x\,dx \geq 0$

Donc : $\left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

D'où : $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e . x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leq e . \int_0^1 x^n\,dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e . \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$

or :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'où : d'après le T.G $\lim\limits_{n\to+\infty} |I_n| = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} . \int_0^1 x^{n+1} e^x\,dx$

on pose : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ Alors : $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$= (-1)^{n+1}\left([x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(e - 0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx\right)$

$= (-1)^{n+1} . e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$

$= (-1)^{n+1} . e - (-1)(-1)^n(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$

$= (-1)^{n+1} . e + (n+1)(-1)^n\int_0^1 x^n e^x\,dx$

$\therefore I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n, \forall n \geq$

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1}\,dx$

	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$\therefore J = \int_0^1 \frac{(x^2+3x-6)\cancel{(x+1)}e^x}{\cancel{(x+1)}}\,dx$

$= \int_0^1 (x^2+3x-6)e^x\,dx$

$= \int_0^1 x^2 e^x\,dx + 3\int_0^1 xe^x\,dx - 6\int_0^1 e^x\,dx$

$= (-1)^2\int_0^1 x^2 e^x\,dx - 3\times(-1)\int_0^1 xe^x\,dx$

$- 6[e^x]_0^1$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

or : $I_1 = -1$ et

$I_2 = (-1)^2 e + 2I_1 = e - 2$

D'où : $J = (e-2) - 3\times(-1) - 6(e-1)$

$= e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\therefore \boxed{J = 7 - 5e}$

Exercice (3) :

1) a)- on a : $f(0) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to0^+} x(\ln(x+1) - \ln x)$

$= \lim\limits_{x\to0^+} (x\ln(x+1) - x\ln x)$

$= 0 - 0 = 0$

D'où : f est continue à droite en 0.

b) $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{x\ln(1+\frac{1}{x})-0}{x-0}$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$

f n'est donc : pas dérivable à droite, au point d'abscisse, une demi-tangente verticale.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x)}_{+\infty}\underbrace{\ln(1+\frac{1}{x})}_{0}$ (F.I)

on pose :

$t=\frac{1}{x}$

Alors : $\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $x=\frac{1}{t}$

∴ $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

∴ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Donc : $y = 1$ A.H à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) $\forall x>0$, $f(x) = x\ln x(1+\frac{1}{x})$

∴ $f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$\ln(1+\frac{1}{x}) + x(\frac{-1}{x^2})(\frac{x}{x+1})$

$\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$

$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= (\frac{-1}{x^2})(\frac{x}{x+1}) + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{\cancel{-x}-1\cancel{+x}}{x(x+1)^2}$

∴ $\boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0, \forall x>0$

Donc : f' est ↘ sur $]0,+\infty[$

or : $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}$

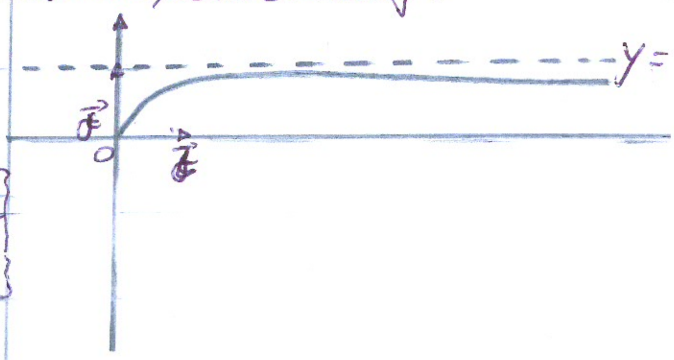
$= 0 - 0 = 0$

D'où : $\forall x>0$, $f'(x)>0$

b) Tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$		↗	1

c) La courbe de f :



3) a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$.

Montrons que f_n est continue sur $[0,1]$.

∴ Sur $]0,1]$, $f_n(x) = x^n\ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonctions $x\longmapsto x^n$ et $x\to\ln(1+\frac{1}{x})$ continues sur $]0,1]$ d'où f_n est continue sur $]0,1]$.

∴ Étudions la continuité de

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} x^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} x^n \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} x^n(\ln(x+1) - \ln x)$

$= \lim_{x\to 0^+} (x^n \ln(x+1) - x^n \ln x) = 0 - 0 = 0$

$= f_n(0)$

D'où : f_n est continue à droite en 0.

Donc : f_n est continue sur $[0,1]$ et l'intégrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette écriture définit bien une suite numérique (A_n).

b) D'après le T.V de la fonction f définie dans la question (1) on a :

$\forall x \geq 0,\ 0 \leq f(x) < 1$

D'où : en multipliant par x^{n-1} on a :

$\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

or : $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où : $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

D'où : $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\forall n \geq 1 ;\ 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$

or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où : d'après le T.G : $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$

) a)- $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$

on pose : $\begin{cases} U(x) = \ln x \\ V'(x) = x^n \end{cases}$ Alors : $\begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x} \\ V(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1} \int_\alpha^1 x^n\,dx$

$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right.$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$

$\therefore I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha - \frac{1}{(n+1}$

b) $\lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha) = \lim \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{\alpha\to 0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1} (\alpha \ln\alpha) - \frac{1}{(n+1)}\right.$

$= 0 - 0 \times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\boxed{\therefore \lim I_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}}$.

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx$

on pose : $\begin{cases} U(x) = x^{n+1} \\ V'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} U'(x) = (n+1) x^n \\ V(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on obtient $V(x)$ en utilisant une I.P.P

$\therefore I_{n+1} = \left[x^{n+1}((n+1)\ln(x+1) - x)\right]$

$- (n+1) \int_0^1 x^n((x+1)\ln(x+1) - x)\,dx$

$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1) \int_0^1 (x^{n+1} + x^n) \ln(x+1)\,dx + (n+1) \int_0^1 x^{n+1}\,dx$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1}\ln(n+1) + x^n \ln(x+1))dx$

$+ (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}\ln x\, dx + \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx\right)$

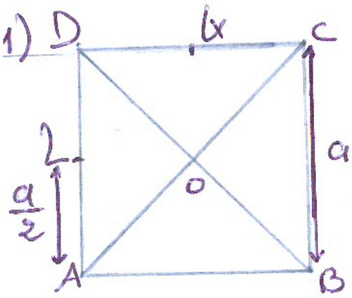
$+ (n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1} + J_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$

Donc:

- $J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)J_{n+1} - (n+1)J_n - \frac{1}{n+2}$
- $J_{n+1} + (n+1)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$
- $(n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$
- $J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}J_n$

Exercice (4): **Partie (A):**

1) 

) Comme $BL^2 = BA^2 + AL^2$

$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

t $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Donc: $BL = AK \neq 0$

D'autre part:

$(\vec{AK}, \vec{BL}) \neq 0\ [2\pi]$

Donc: il existe une unique rotation qui transforme A en B et K en L Et

…mme méd[AB] = (OK) et méd[KL] = (BD)

…t $(OK) \cap (BD) = \{O\}$, le centre de r est donc le point O.

un angle de r est $(\vec{OA}, \vec{OB})$

$\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

3) a) Comme $D \neq B$ et $L \neq O$, il existe donc une unique similitude directe f_1 qui transform D en L et B en O.

Le rapport de f_1 est

$\frac{OL}{BD} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Et un angle de f_1 est:

$(\vec{BD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

b) Comme $f_1(P) = P$ et $f_1(B) = O$, on a: donc:

$(\vec{PB}, \vec{PO}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

or: $(\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Donc: le point P appartient au cercle circonscrit au triangle OAB

C'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre [AB].

De même: Comme $f_1(P) = P$ et $f_1(D) = L$ on a:

$(\vec{PD}, \vec{PL}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

or: $(\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où: $(\vec{PD}, \vec{PL}) = (\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}\ (\neq 0\ [\pi])$

Donc : le point P appartient au cercle circonscrit au triangle ODL c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre [OD] on constate que le point O est commun aux cercles de diamètres [AB] et [OD], mais qu'il n'est pas le centre de f_1 (car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$) ; le point P est donc le second point commun à ces deux cercles (autre que O).

) b)- Montrons que P est le point d'intersection de (BL) et (AK).

$(\vec{PB}, \vec{PL}) = (\vec{PB}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PL})$

$= (\vec{AB}, \vec{AO}) + (\vec{DO}, \vec{DL})\ [\pi]$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

Donc : $\boxed{P \in (BL)}$.

De m :

$(\vec{PA}, \vec{PK}) = (\vec{PA}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PK})$

$= (\vec{BA}, \vec{BO}) + (\vec{DO}, \vec{DK})\ [\pi]$

$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

Donc : $\boxed{P \in (AK)}$.

P est donc : le point d'intersection de (BL) et (AK).

) a) Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$

un angle de f_2 est :

$(\vec{BO}, \vec{DL}) = (\vec{BD}, \vec{DB}) + (\vec{DB}, \vec{DL})$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

Et le rapport de f_2 est : $\frac{DL}{BO} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont deux similitudes directes de m rapport et de m angle et transforme le point B en au m point L (car $f_2 \circ f_1(B) = f_2(f_1(B)) = f_2(O) = L$ et $f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$)

Donc : $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$

Le centre de f_2 est donc celui de f_1 c'est-à-dire le point P.

) a) $h = f_1 \circ f_2$ est la composée de deux similitudes directes dont le produit des rapports est $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ (+ et dont la somme des angles est $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi\ [2\pi]$ et ayant m centre P d'où : h est une homothétie de centre et de rapport $-\frac{1}{4}$.

or : $h(P) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D)$.

D'où : $\vec{PL} = -\frac{1}{4}\vec{PB}$

Donc : $4\vec{PL} + \vec{PB} = \vec{0}$

D'où : $P = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & L \\ 1 & 4 \end{array}$

b) $P = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & L \\ 1 & 4 \end{array}$

$\Leftrightarrow P = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} B & D & A \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$

or : $S = bar \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$

D'où : $P = bar \begin{array}{c|c|c|c|c} A & C & D & D & A \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}$

$\Rightarrow P = bar \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 3 & 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow P = bar \begin{array}{c|c} A & \alpha \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

Partie (B) :

1) $r = S_1 \circ S_2$ est composée de deux réflexions de plans perpendiculaires dont la droite d'intersection est (AD).
D'où : r est la demi-tour d'axe (AD).

2) $t = S_3 \circ S_4$ est composée de deux réflexions de plans parallèles, D'où : t est une translation de vecteur de t est : $2\vec{DA}$

3) $f = r \circ t$ est composée d'une translation et d'une rotation telles que : le vecteur de la translat° est un vecteur directeur de l'axe de la rotation.
D'où : f est le vissage d'axe (DA) d'angle π et de vecteur $2\vec{DA}$.