Nom: Aichetou mnt sidi / N°: 1519 / classe: 7c / Ecole : Erraja

Corrigé de l'EXE:2 du Bacc 2011.S.C

solution: $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$

1)a) $D_g = \mathbb{R}$

$\lim_{-\infty} g(x) = \lim_{-\infty} (-x)^3 = -(-\infty)^3 = +\infty$

$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} (-x)^3 = -\infty$

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3)(-2)$

$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$

D'où $g'(x) < 0$

T.V

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

b) Mq g réalise une bijection

D'après T.V g est continue et strictement monotone, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

c) comme g réalise une bijection donc l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Et on a: $g(0,6) = -(0,6)^3 - (0,6)^2 - 2(0,6) + 2$

$\Rightarrow g(0,6) \simeq 0,22 > 0$

et $g(0,7) = -(0,7)^3 - (0,7)^2 - 2(0,7) + 2$

$\Rightarrow g(0,7) = -0,23 < 0$

D'où $0,6 < \alpha < 0,7$

2) on considère $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

a) calcule de $f'(x)$

$f'(x) = \frac{(2e^{-x} - 2xe^{-x})(x^2+2) - 2x \cdot 2xe^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$= \frac{2x^2e^{-x} + 4e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} + 4e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

Donc:

$f'(x) = \frac{2e^{-x}(-x^3 - x^2 - 2x + 2)}{(x^2+2)^2}$

D'où $f'(x) = \frac{2g(x) \cdot e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

b) l'étude de $f(x)$

$\lim_{-\infty} f(x) = \lim \frac{e^{-x}}{x^2}\left(\frac{2x}{1+\frac{2}{x^2}}\right)$

$\begin{cases} \lim_{-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{+\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty \\ \lim_{-\infty} \frac{2x}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{2x}{1+0} = -\infty \end{cases}$

D'où $\lim_{-\infty} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

a $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{2x}{2+x^2} \cdot e^{-x}$

et $\begin{cases} \lim_{+\infty} \frac{2x}{2+x^2} = \lim_{+\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim e^{-x} = \lim_{-\infty} e^X = 0 \end{cases}$

D'où $\lim_{+\infty} f(x) = 0 \cdot 0 = 0$

c) d'après a) $f'(x) = \frac{2g(x) \cdot e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

donc $f'(x)$ a la même signe que $g(x)$

et d'après 1/c/

Ex2: Bacc 2011 S.C (suite)

$g(\alpha)=0$ D'où le signe de $g(x)$ est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

T.V de f:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

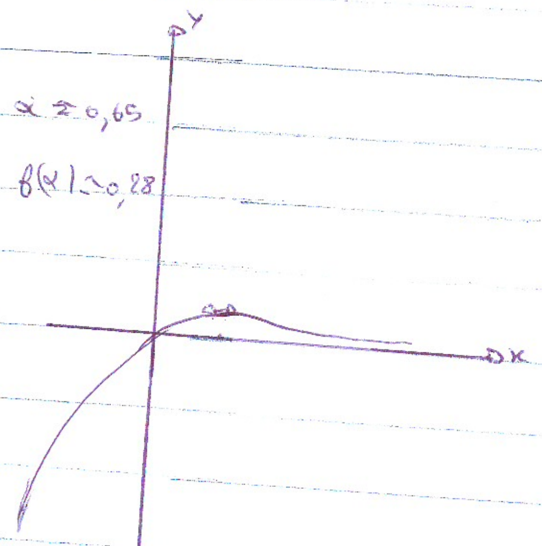
c) la courbe de f

* on a: $\lim\limits_{+\infty} f(x)=0$

donc $\mathcal{C}$: A.H $y=0$ au $+\infty$

Et on a: $\lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} \frac{x e^{-x}}{x^2+2} = \lim\limits_{-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}\left(\frac{x}{1+\frac{2}{x^2}}\right) = +\infty\left(\frac{e}{1+0}\right) = +\infty$

D'où $\mathcal{C}$ admet B.P (oy) au $-\infty$



3) la suite (u_n) définie par:

$\forall n \geq 1$: $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

on a pour $n \leq t \leq n+1$

$n \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq t$

$0 < t < t^2 < t^2+1$

d'où $0 < \frac{1}{1+t^2} < 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{te^{-t}}{1+t^2} \leq e^{-t}$

$\Rightarrow$ on intègre:

$0 \leq \int_n^{n+1} \frac{te^{-t}}{1+t^2}\,dt \leq \int_n^{n+1} e^{-t}\,dt$

$0 \leq u_n \leq \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1}$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq e^{-n} - e^{-n-1}$

$0 \leq u_n \leq e^{-n}(1-e^{-1})$

$0 \leq u_n \leq e^{-n}(1-\frac{1}{e})$

En déduire $\lim\limits_{+\infty} u_n$

on a: $0 \leq u_n \leq (1-\frac{1}{e})e^{-n}$

$\lim (1-\frac{1}{e})e^{-n} = (1-\frac{1}{e}) \cdot 0 = 0$

d'où d'après T.G

$0 \leq \lim\limits_{+\infty} u_n \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} u_n = 0$

b) pour que $u_{n_0} \leq 10^{-5}$, alors il suffit $(1-\frac{1}{e})e^{-n_0} \leq 10^{-5}$

$\Rightarrow e^{-n_0} \leq \frac{10^{-5}}{1-\frac{1}{e}}$

donc: $-n_0 \leq \ln\left(\frac{10^{-5}}{1-\frac{1}{e}}\right)$

$\Rightarrow n_0 \geq -\ln\left(\frac{10^{-5}}{1-\frac{1}{e}}\right)$

$\Rightarrow n_0 \geq -\ln\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{e})10^5}\right)$

$\Rightarrow n_0 \geq \ln\left((1-\frac{1}{e})\cdot 10^5\right)$

$\Rightarrow n_0 \geq \ln(1-\frac{1}{e}) + \ln(10^5)$

$\Rightarrow n_0 \geq 12$, d'où à partir $n_0 = 12$

on a: $0 \leq u_n \leq 10^{-5}$

Nom: Aichetou mnt Sidi N°: 1519 classe: 7c Ecole: Erraja

Corrigé de l'Ex2 du Bacc 2017 S.C

Solution:

$f_n(x) = (\ln x)^n$ Pour tout $n \geq 2$ sur $]0,+\infty[$

C_n sa courbe

1/a) $\lim\limits_{+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{+\infty} (\ln x)^n = +\infty$

si n Pair: $\lim\limits_{0^+} f_n(x) = +\infty$

si n impair: $\lim\limits_{0^+} f_n(x) = -\infty$

b) $f_n'(x) = \dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$

si n est impair alors n-1 est pair et $(\ln x)^{n-1} \geq 0$

T.V:

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

si n est pair alors n-1 est impair

d'où le signe de $(\ln x)^{n-1}$ est celui de $\ln x$

T.V:

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

2/a) la position relative

le signe de $f_3(x) - f_2(x)$

$f_3(x) - f_2(x) = (\ln x)^3 - (\ln x)^2 = (\ln x)^2(\ln x - 1)$

Donc:

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln x)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$(\ln x - 1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_3(x) - f_2(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
P.R		$\frac{C_2}{C_3}$	(OI)	$\frac{C_2}{C_3}$	(A)	$\frac{C_3}{C_2}$	

b) Construction:

on a: $\lim \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim \dfrac{f_3(x)}{x} = 0$

alors chacun des courbes $(C_2)(C_3)$

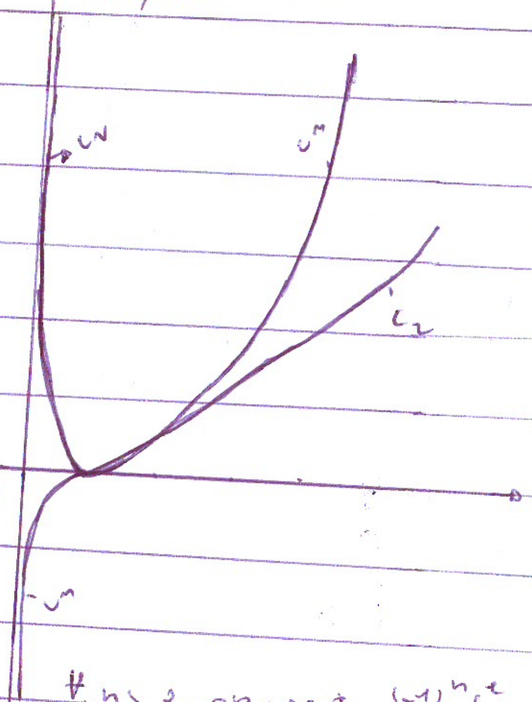
admet une Branche Parabolique

de direction (Ox) en $+\infty$

De plus $\lim\limits_{0^+} f_2(x) = +\infty$, $\lim\limits_{0^+} f_3(x) = -\infty$

alors chacun des courbes admet une

A.V d'équation $x = 0$.



$\forall n \geq 2$ on pose $I_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_1^e f_n(x)\,dx$

et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

3/a) Mq: $I_2 = \dfrac{e-2}{2}$

$I_2 = \dfrac{(-1)^2}{2!}\displaystyle\int_1^e f_2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e (\ln x)^2\,dx$

on pose: $u(x) = (\ln x)^2 \Rightarrow u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

Alors $I_2 = \frac{1}{2}\left([x(\ln x)^2]_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx\right)$

Exo: Bac 2017 S.C (suite)

$= \frac{1}{2}e - 0 - \int_1^e \ln x\,dx$

Calculons $\int_1^e \ln x\,dx$

$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

Alors $\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx$

$= e-(e-1) = 1$ Donc $I_2 = \frac{e-2}{2}$

b) Mq $\forall n \geq 2$

On a: $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e + I_n$

On a: $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_1^e (\ln x)^{n+1}dx$

On pose, $u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left([x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n dx\right)$

$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(e - (n+1)\frac{n!}{(-1)^n}I_n\right)$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(e + \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}}I_n\right)$

Donc $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e + I_n$

c) Vérifier que:

$I_2 = -1 + eu_2$

$I_2 = \frac{e-2}{2}$ alors $I_2 = -1 + \frac{e}{2} = -1 + \frac{1}{2}e$

$= -1 + \left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)}{1!} + \frac{(-1)^0}{0!}\right)e$

Car $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} = u_2$, Donc $I_2 = -1 + eu_2$

d) déduisons que $\forall n \geq 2$

$I_n = -1 + eu_n$ Par récurrence

Pour $n = 2$ $I_2 = -1 + eu_2$

Donc vraie pour le premier terme

Supposons que $I_n = -1 + eu_n$

et montrons que $I_{n+1} = -1 + eu_{n+1}$

On sait que $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e + I_n$

et d'après l'hypothèse $I_n = -1 + eu_n$

Donc $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e + (-1 + eu_n) =$

$-1 + e\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)e + (-1 + eu_n) = -1 + e\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right) = -1 + e\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}\right) = -1 + eu_{n+1}$

Conclusion: $\forall n \geq 2$, $I_n = -1 + eu_n$

4) a) Mq: $\forall x \in [1,e]$, $0 \leq f_n(x) \leq 1$

Pour tout $n \geq 2$ f_n est croissante sur $[1,e]$

alors: $1 \leq x \leq e \Rightarrow f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(e)$

$\Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq 1$, déduisons que:

$|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$, on a $|I_n| = \frac{1}{n!}\int_1^e f_n(x)dx$

$0 \leq f_n(x) \leq 1$ par intégration on obtient:

$0 \leq \int_1^e f_n(x)\,dx \leq [x]_1^e$

$0 \leq \int_1^e f_n(x)\,dx \leq e-1$, en multiplie par $\frac{1}{n!}$

On a: $0 \leq \frac{1}{n!}\int_1^e f_n(x)\,dx \leq \frac{e-1}{n!}$

Alors $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$

b) Déduisons la limite de (I_n) et de (u_n)

On a $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$ donc $-\frac{e-1}{n!} \leq I_n \leq \frac{e-1}{n!}$

Alors d'après T.G

$\lim_{+\infty} I_n = 0$

Comme $I_n = -1 + eu_n$ alors

$u_n = \frac{I_n + 1}{e}$ Alors $\lim_{+\infty} u_n = \frac{0+1}{e} = \frac{1}{e}$

Ex 4: Bacc 2017 S.N

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in]0,+\infty[$

1/a) $\lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0^+$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

b) f continue, strictement monotone sur $[1,\sqrt{e}]$. $f(1) = 0$

$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{6} < \frac{1}{2e}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \in [0, \frac{1}{2e}]$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{n}$ admet 1 solution

$a_n \in I = [1,\sqrt{e}]$

c) on a : $n < n+1$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow f(a_{n+1}) < f(a_n)$

comme f est ~~de~~croissante alors

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow (a_n)$ est une suite décroissante, $a_n \geq 0 \Rightarrow (a_n)$ décroissante minorée $\Rightarrow$ (a_n) converge.

2) on a : $k \leq x \leq k+1 \Rightarrow$

a) $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$

$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$

b) calcul de $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

$\begin{cases} u = \ln x \\ v' = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^n + \int_2^n \frac{1}{x^2} dx$

$= \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_2^n$

$= \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

3/a) on a :

$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$

$\frac{\ln 3}{3^2} \leq \int_2^3 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 2}{2^2}$

$\frac{\ln 4}{4^2} \leq \int_3^4 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 3}{3^2}$

$\vdots$

$\frac{\ln n}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2}$

En additionnant membre à membre

on a : $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$

suite Ex4 Bac c 2017 SN

b) on a :

$$\begin{cases} S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n f(x)\,dx \Rightarrow S_n \leq \int_2^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2^2} \\ \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2} \Rightarrow \int_2^n f(x)\,dx + \frac{\ln n}{n^2} \leq S_n \end{cases}$$

$$\int_2^n f(x)\,dx + \frac{\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \int_2^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2^2}$$

$$\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} + \frac{\ln 2}{2^2}$$

4) on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}, \quad I_n = \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$$

a)

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow (\ln x)^n \leq (\ln 2)^n$$

$$0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{(\ln 2)^n}{x^2} \leq (\ln 2)^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$$

$$\ln 2 < 1 \Rightarrow \lim_{+\infty} (\ln 2)^n = 0$$

d'où

$$\lim_{+\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} I_n = 0$$

b) $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}\,dx$

$$\begin{cases} u = (\ln x)^{n+1} \\ v' = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{(n+1)}{x}(\ln x)^n \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}\right]_1^2 + \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!} + I_n$$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}$$

c) Par récurrence

$$I_{n+1} = I_n - \frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}\right) \text{ vraie}$$

on suppose que :

$$I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$$

Montrons qu'elle est vraie pour I_{n+1} :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2(n+1)!}(\ln 2)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\right]$$

d) on a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$

donc :

$$I_n = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}\left(1 + \frac{(\ln 2)}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{(n+1)!}\right)$$

$$I_n = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} u_n$$

d'où

$$\ln 2\, u_n = -2I_n + 1$$

$$u_n = \frac{1 - 2I_n}{\ln 2}$$

$$\boxed{\lim_{+\infty} u_n = \frac{1}{\ln 2}}$$