Nom : Fatimetou / sid'Ahmed N° : 1647 classe : 7C

Ecoles privés Elmaarif et ERRaja Bac 2013 (S.N)

Ex2 : 4eme fois

1) $P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32+4i$

a/ $P(4) = 4^3 - (9-i)\times 16 \times 4(28-5i) - 32+4i$

$= 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i$

$= 0$

$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$

En utilisant le tableau d'Horner

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-32+4i$
4		4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$P(z) = (z-4)(z^2 + (-5+i)z + 8 - i)$

b) $P(z) = 0 \iff z-4=0 \iff z=4$

ou $z^2 + (-5+i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = (-5+i)^2 - 4\times 1\times(8-i)$

$= 25 - 10i - 1 - 32 + 4i$

$= -8 - 6i = (1-3i)^2$

$z_1 = \frac{5-i+1-3i}{2} = \cancel{(4-3i)}\ 3-2i$

$z_2 = \frac{5-i-1+3i}{2} = 2+i$

$S = \{4, 3-2i, 2+i\}$

2) $A(4)$; $B(2+i)$, $C(3-2i)$

a) $az+b$ / $a, b \in \mathbb{C}$

$S : C \to C \Rightarrow Z_C = az_C + b$ ①

$S : A \to B \Rightarrow Z_B = az_A + b$ ②

① - ② donné

$Z_C - Z_B = a(Z_C - Z_A) \Rightarrow a$

$a = \frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} = \frac{3-2i-2-i}{3-2i-4}$

$= \frac{1-3i}{-1-2i} = \frac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4} = \frac{5+5i}{5}$

$= 1+i$

b) $Z_C - aZ_C = (1-a)Z_C =$

$(1-1-i)(3-2i) = -3i-2$

Donc :

$S : M(z) \to M'(Z') / Z' = (1+i)Z - 2 - 3i$

b) la rapport $k = |1+i| = \sqrt{2}$

l'angle $\theta = Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

Ex2 5eme fois.

1) $P(z) = z^3 - (9-i)Z^2 + (28-5i)z + 32+4i$

a) $P(4) = 4^3 - (9-i)\times 16\times 4(28-5i)$ $32+4i$

$= 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i$

$= 0$

$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$

En utilisent le tableau d'Horner :

Ex 2 : 5ème fois

1) a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

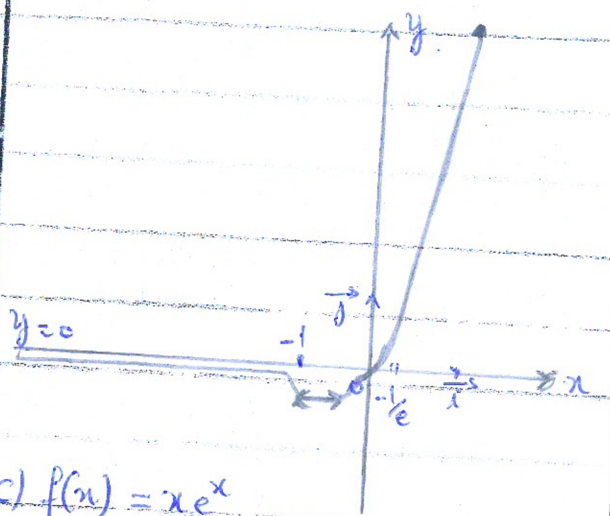
b) * $y = 0$: A.H à (C) au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\therefore$ (C) admet une B.P // $(y'y)$ au voisinage de $+\infty$

* $\in \cap (y'y)$: $(0,0)$

* $\in \cap (x'x)$: $(0,0)$



c) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x$

$= (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc f est une solution de l'équation différentielle

$y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et $A = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.

or : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$

donc $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^x \end{cases}$ alors.

Suite Ex2 : 5^{ème} fois.

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$\therefore A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = [(x-1)e^x]_0^1$$

$$\boxed{A = 1\ u_a}$$

2) a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 xe^x dx$

or : $\int_0^1 xe^x dx = 1$ Donc $\boxed{I_1 = -1}$

b/ $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$

Donc $|I_n| = |(-1)| \cdot \int_0^1 x^n e^x dx$

$$= -1 - x \left| \int_0^1 x^n e^x dx \right|$$

or : $\forall x \in [0,1],\ x^n e^x \geq 0$

D'où : $\int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$

Donc : $\left| \int_0^1 x^n e^x dx \right| = \int_0^1 x^n e^x dx.$

D'où : $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x dx$

$0 \leq u \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \cdot \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}}$$

or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'ou d'après le T.G $\lim\limits_{n \to +\infty} |I_n| = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x dx.$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1) x^n \\ v(x) = e^x. \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \left([x^{n+1} e^x]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx. \right)$

$= (-1)^{n+1} \left(e - 0 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx. \right)$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1} (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx.$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^n (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx.$

$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx.$

$$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n,\ \forall n \geq 1}$$

3) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6) e^x}{x+1} dx.$

	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$\therefore J = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x - 6)(x+1) e^x}{(x+1)} dx.$

$= \int_0^1 (x^2 + 3x - 6) e^x dx$

$= \int_0^1 x^2 e^x dx + 3 \int_0^1 xe dx - 6 \int_0^1 e^x dx$

$= (-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x dx - 3 \times (-1) \int_0^1 xe^x dx.$

$-6 [e^x]_0^1$

$= I_2 - 3 I_1 - 6 (e-1)$

Or : $I_1 = -1$ et $I_2 = (-1)^2 e + 2 I_1 = e - 2$

D'où : $J = (e-2) - 3 \times (-1) - 6 (2-1)$

$= e - 2 + 3 = 6e + 6$

$$\boxed{J = 7 - 5e}$$

Ex 4 : 5ème fois.

f est la fonction de finie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) a) Le tableau de variation de f.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0^+$

f est derivable sur $]0, +\infty[$

$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1/x \times x^2 - 2x \times \ln x}{(x^2)^2}$

$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

Or $x^3 > 0$ donc $f(x) \geq 0 \iff 1 - 2\ln x \geq 0 \iff \ln x \leq \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

b/ Montrons que pour tout entier $n \geq 6$ l'equation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans une seule solution ~~f(x)=~~$\frac{1}{n}$ noté a_n :

- La restriction de f sur l'intervalle $I = [e, \sqrt{e}]$ est continue est strictement croissante $f(I) = J = [0, \frac{1}{2e}]$

- De plus $\forall n \geq 6$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2e}$. $((\frac{1}{6} \simeq 0{,}167 < \frac{1}{2e} \simeq 0{,}184)$ Alors $\forall n \geq 6 : \frac{1}{n} \in J$ donc d'aprés le theoreme de valeur intermédiaire l'equation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet $[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n

c) Montrons que la suite (a_n) est decroissante et qu'elle converge

On a $\forall n \geq 6 : \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ or, $\forall n \geq 6 : \frac{1}{n}$ $f(a_n)$ et $\frac{1}{n+1}$ $f(a_{n+1})$ donc $f(a_n)$ $f(a_{n+1})$ strictement croissante sur $[1, \sqrt{e}]$ alors $a_n > a_{n+1}$ et la suite (a_n) est strictement decroissante.

d'autres part. $a_n \in [1, \sqrt{e}]$ donc la suite (a_n) et décroissante et minorée par 1 d'ou il est convergent

2) a) Montrons que pour tout entier k strictement superieur à 1 on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}$ soit k un entier strictement superieur à 1 on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}$ soit k un entier strictement superieur à 1

Suite Ex4 2ème fois

alors $K \geq 2$ et $\forall x \in [K, K+1]$

$K \leq x \leq K+1$

or f décroissante sur $[2, +\infty[$

donc $f(K+1) \leq f(x) \leq f(K)$

$\frac{\ln(K+1)}{(K+1)^2} < \frac{\ln(x)}{x^2} < \frac{\ln(K)}{K^2}$ donc

$\int_K^{K+1} \frac{\ln(K+1)}{(K+1)^2} dx < \int_K^{K+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx < \int_K^{K+1} \frac{\ln(K)}{K^2} dx$

Soit $\frac{\ln(K+1)}{(K+1)^2} \int_K^{K+1} dx \leq \int_K^{K+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \frac{\ln(K)}{K^2} \int_K^{K+1} dx$.

Par conséquent une intégration par partie pour exprimer en fonction de n l'intégral.

On pose :

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^n + \int_2^n \frac{1}{x^2} dx$

$= -\frac{\ln x}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

3) pour tout entier n supérieur strictement à 1 on pose

$S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$

a) Montrons que $S_n - \frac{\ln(2)}{2} < \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

$S_n - \frac{\ln(x)}{n^2}$

D'après 2)a) On a :

$\frac{\ln(K+1)}{(K+1)^2} \leq \int_K^{K+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln K}{K^2}$

donc :

$\begin{cases} \frac{\ln(3)}{3^2} \leq \int_2^3 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 2}{2^2} \\ \frac{\ln(4)}{4^2} \leq \int_3^4 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 3}{3^2} \\ \vdots \\ \frac{\ln n}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2} \end{cases}$

En additionnant membre à membre on obtient :

$\sum_{K=3}^n \frac{\ln(K)}{K^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \sum_{K=2}^n \frac{\ln K}{K^2}$

donc

$\boxed{S_n - \frac{\ln(2)}{2^2} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}}$

b) Montrons que $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(n)}{n}$

D'après la question 2-b) On a

$\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

de la question précédent On a :

$S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$

La première ~~inég~~ inégalité s'écrit :

$S_n \leq \frac{\ln(2)}{2^2} + \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Donc $S_n \leq \frac{\ln(2)}{2^2} + \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

La seconde inégalité : $S_n \geq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx + \frac{\ln(x)}{n^2}$.

suite Ex 4 $\quad$ 5ème fois.

$I_1 = -\int_2^1 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln 1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\left(\frac{\ln 2}{1!}\right)$

alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$

Remarque : On peut établir une démonstration par récurence

d) Exprimons (U_n) en fonction de I_n : on sait que $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2}\ln 2\left[\frac{1}{1!} + \frac{(\ln 2)^1}{2!}\right.$

donc $I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} U_n \ln 2$ alors

$2 I_n = 1 - U_n \ln 2$

$\Rightarrow U_n \ln 2 = 1 - 2 I_n$ et

$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$

La limite de (U_n)

$U_n = \frac{1-2I_n}{\ln 2}$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{\ln 2}}$$

suite Ex4 2ème fois

donc $S_n \geq \frac{1+\ln(2)}{2^2} - \frac{1+\ln n}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2}$

alors $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} < S_n \leq \frac{\ln(2)}{2^2} + \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

4/ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$

et $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

a - Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$; $\forall x \in [1,2]$.

$1 \leq \ln x \leq \ln 2 \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq (\ln 2)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

d'autres part $\forall x \in [1,2]$ $1 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$

par produit $0 \leq \frac{(\ln x)}{x^2} \leq (\ln 2)^n$

par intégration 1 à 2 : $0 \leq \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx \leq \int_1^2 (\ln 2)^n dx$

et $0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)}{x^2} dx \leq \frac{1}{n!} (\ln 2)^n \int_1^2 dx$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$

pour la limite de I_n ; comme

$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} \leq \lim_{n \to +\infty} (\ln 2)^n = 0$ car $-1 < \ln 2 < 1$

donc d'après le théorème de gendarme $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

b/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

On a $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx$

On pose : $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)\frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$

$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

d'où $I_{n+1} = -\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!} + I_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)}$ dx

c) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

Nous savons que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}}$

$$\begin{cases} I_2 = I_1 - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^2}{2!} \\ I_3 = I_2 - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^3}{3!} \\ I_4 = I_3 - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)}{3!} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^n}{n!} \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = I_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

Or d'après 2-b/ On a

$\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

Nom: Fatimetou / Sid'Ahmed N°: 1647 classe: 7C

Ecoles privés Elmaarif et Erraja Bac: 2017 (S.C) Ex 4:

Exercice 2 : 4

1) $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$

a) ① $D_g = \mathbb{R}$ (fonction polynomiale),

Les limites

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = (-\infty)^3 = -(-\infty)$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x)}$

$\lim g(x) = \lim (-x^3) = -(+\infty)^3$

$\Rightarrow \lim g(x) = -(+\infty)^3$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

La dérivée et T.V

$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3)(-2)$

$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$

Donc $g'(x) < 0$

TV

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

b) Mq g réalise une bijection

1) dressez le tableau de variation

g est continue et strictement monotone donc g réalise une bijection $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

ⓒ Comme g réalise une bijection donc l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution car $g(\mathbb{R})$ une unique solution de car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Et comme $g(0{,}6) = -(0{,}6)^3 - (0{,}6)^2 - 2(0{,}6) + 2$.

$\Rightarrow g(0{,}6) = +0{,}22 > 0$

et $g(0{,}7)^3 = -$.

② On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x e^{-x}$

$f(x)$ $2x^2 e^{-x}$ ∞ $-2x^2 e^{-x}$

a) Calcule du $f'(x)$

$f(x) = 2x^2 e^{-x} - 2x^3 e^{-x}$ ... $+ \infty^{-x} 2x$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{-2x^2 - e^{-x} - 2x^3 e^{-x} - 2x - 2x e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{2x^2 e^{-x} - 2x^3 e^{-x} - 4x e^{-x} + 4e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

Donc

$\dfrac{f(x) 2e^{-x}(-x^3 - x^2 - 2x + 2)}{(x^2+2)^2}$

Donc

$f(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

b) lection de $f(x)$

les limites

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim \dfrac{e^{-x}}{-x} \dfrac{2}{1+\frac{2}{x^2}}$

$-2 \varepsilon \begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \end{cases}$

$\dfrac{e^{x}}{x^2} = +\infty$

Donc

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty (-\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e \dfrac{ex}{1+x^2} e^{-x}$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times 0 = 0$

or d'apres a) $f'(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

et donc $f(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

et donc $f(x)$ a le meme signe de $(x = 0)$ donc le signe de $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Dou le tableau de Variation de f est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

c) la Courbe de f

on a $\lim f(x) = 0$ donc des Courant

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale de quation $y = 0$ au voisinage d' $+\infty$

Et donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e e^{-x}}{x^2+ }$

$= \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} \left(\dfrac{e}{1+\frac{2}{x^2}} \right)$

$= +\infty \left(\frac{1}{1+0} \right) = +\infty$

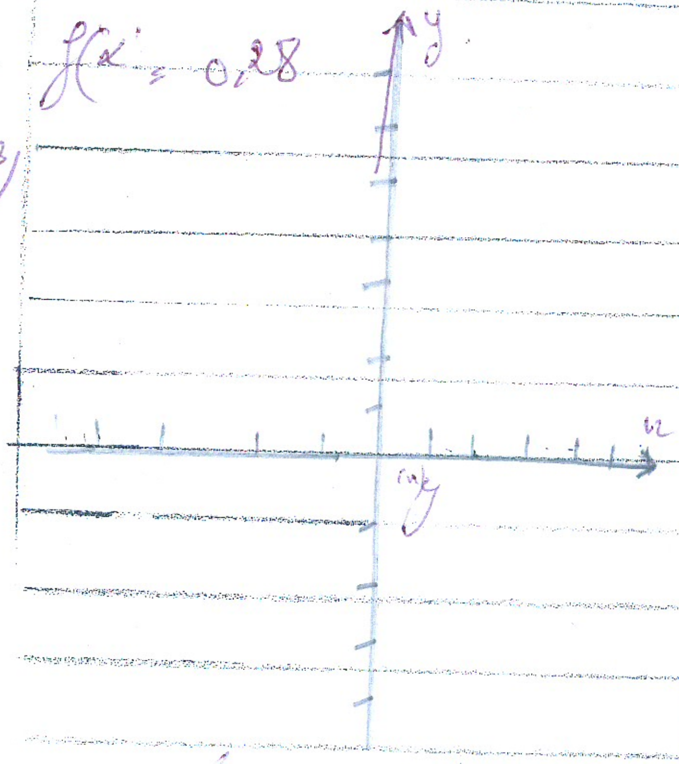
Donc la Courbe de f admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $(-\infty)$

la Courbe

$\alpha = 0,69$

$f(\alpha) = 0,28$

3)



(3) la Suite (U_n) définie par $\forall n$ $U_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

donc pour $n \le t \le n+1$

$\Rightarrow t \ge 1 \Rightarrow (t-1)^2 \ge 0$

$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 \ge 0 \Rightarrow t^2 + 1$

$t^2 + 2 \ge t^2 + 1 \Rightarrow t^2 + 2$

$0 + \ge 0$

donc $0 \le \frac{2t}{2+t^2} < 1$

$\Rightarrow$ on intègre.

$\int_n^{n+1} \frac{2t\, e^{-t}}{2+t^2} \le \int e^{-t}\, dt$

$0 \le U_n \le \left[-e^{-t} \right]_n^{n+1}$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le e^{-n} - e^{-n-1}$

$0 \le U_n \le e^{-n} - e^{-n-1}$

$0 \le U_n \le \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$

En déterminer $\lim_{n \to +\infty} U_n$

On a

$0 \le U_n \le \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$

$\lim \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) 0 = 0$

donc d'après théorème de gendarme

$0 \le \lim U_n \le 0 \Rightarrow \lim U_n = 0$

b) pour que $U_{n_0} \le 10^{-5}$ alors il suffit $\left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} \le 10^{-5}$

$\Rightarrow e^{-n} \le 10^{-5}$

d'où $-n_0 \le \ln\left(10^{-5}\right)$

$\Rightarrow n_0 \ge -\ln \left(\frac{1 - \frac{1}{e}}{10^{-5}} \right)$

$\Rightarrow n_0 \ge \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + 10^{5}$

$\Rightarrow n_0 \ge \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \ln(10)^5$

$\Rightarrow n_0 \geq 12$

donc : a partir de $n_1 = 12$ on a

$0{,}5 \leq u_n < 10^{-5}$

Ex3

Nom : Aichetou mnt sidi / N° : 1519 / classe : 7c / Ecole : Erraja

Corrigé de l'exercice 2 du Bac c 2013 S.N

Solution :

1) $P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$

a) $P(4) = 4^3 - (9-i)4^2 + 4(28-5i) - 32 + 4i$

$= 64 - 144 + 16i + 112 - 20i - 32 + 4i$

$= 0$

$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$

En utilisant T.H

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-32+4i$
4	↓	4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$P(z) = (z-4)(z^2 + (-5+i)z + 8 - i)$

b) $P(z) = 0 \Rightarrow z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$

ou $z^2 + (-5+i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = (-5+i)^2 - 4\times1(8-i)$

$= 25 - 10i - 1 - 32 + 4i$

$= -8 - 6i = (1-3i)^2$

$z_1 = \frac{5-i+1-3i}{2} = 3 - 2i$

$z_2 = \frac{5-i-1+3i}{2} = 2+i$

$S = \{4, 3-2i, 2+i\}$

2) $A(4)$, $B(2+i)$, $C(3-2i)$

a) $S : M(z) \to M(z')$

$z' = az + b$ / $a, b \in \mathbb{C}$

$S : C \to C \Rightarrow z_C = az_C + b$ ①

$S : A \to B \Rightarrow z_B = az_A + b$ ②

① - ② donne :

$z_C - z_B = a(z_C - z_A)$

$\Rightarrow a = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \Rightarrow a = \frac{3-2i-2-i}{3-2i-4}$

$= \frac{1-3i}{-1-2i} \times \frac{-1+2i}{-1+2i} = \frac{5+5i}{5}$

$\Rightarrow \boxed{a = 1+i}$

$b = z_C - az_C = (1-a)z_C = (1-1-i)(3-2i)$

$\Rightarrow \boxed{b = -3i - 2}$

Donc :

$S : M(z) \to M'(z')$

$z' = (1+i)z - 2 - 3i$

b) $k = |1+i| = \sqrt{2}$

$\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

Nom : Aichetou mnt Sidi / N° : 1519 / classe : 7c / Ecole : Erraja

Corrigé de l'exercice 2 du Bac c 2014 . s.n

Solution :

1) a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f est continue et derivable sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

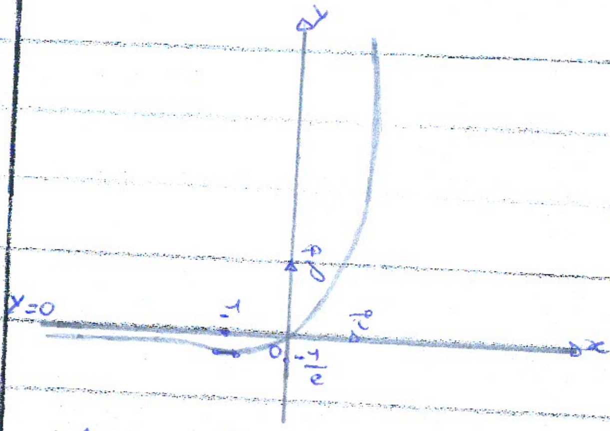
b) * $y = 0$: A.H à (C) au voisinage $-\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

∴ (C) admet une B.P // $(y'y)$ au voisinage de $+\infty$

* $C \cap (y'y) : (0,0)$

* $C \cap (x'x) : (0,0)$



c) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x = (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc f est une solution de l'équation differentielle $y'' - 2y' + y = 0$

d) l'aire du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est $A = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

on : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

D'où $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$

$= [(x-1)e^x]_0^1 \Rightarrow A = 1\,u.A$

Suite Ex2 : Bacc 2014 S.N

2) a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 x e^x \, dx$

or : $\int_0^1 x e^x \, dx = 1$

$\Rightarrow I_1 = -1$

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x \, dx$

$|I_n| = |(-1)^n| \, |\int_0^1 x^n e^x \, dx|$

$= 1 \times |\int_0^1 x^n e^x \, dx|$

or $\forall x \in [0,1]$ $x^n e^x \geq 0$

D'où : $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x \, dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}}$

or : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'où d'après le T.G $\lim_{x \to +\infty} |I_n| = 0$

Donc $\lim_{x \to +\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1}\left([x^{n+1} e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(e - 0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\right)$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^n(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n \quad \forall n \geq 1$

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)e^x}{x+1} dx$

	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	+6
	1	3	-6	0

$\therefore J = \int_0^1 \frac{(x^2+3x-6)\cancel{(x+1)}e^x}{\cancel{(x+1)}} dx$

$= \int_0^1 (x^2 + 3x - 6)e^x dx$

$= \int_0^1 x^2 e^x dx + 3\int_0^1 x e^x dx - 6\int_0^1 e^x dx$

$= (-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x dx - 3 \times (-1)\int_0^1 x e^x dx - 6[e^x]_0^1$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

or $I_1 = -1$ et $I_2 = (-1)^2 e + 2I_1$

$I_2 = e - 2$

D'où : $J = (e-2) - 3 \times (-1) - 6(e-1)$

$= e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\therefore \boxed{J = 7 - 5e}$