Exo 3 2011

S.N

Nom: N'Guiya/Habib

N°: 1188, classe: 7eC

Bac: 2011. S.N. Ex°(3):

Solution: La 5ème fois:

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

① a)- limites de f:

$$\lim_{-\infty} f(x)=\lim_{-\infty}\frac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}-1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}\frac{\cancel{e^{x}}(e^{2x}-1)}{\cancel{e^{x}}(e^{2x}+1)}=\lim_{+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Interpretation graphique: La courbe de f admet deux A.H d'équation $y=-1$ au voisinage de $-\infty$ et $y=1$ au voisinage de $+\infty$

b- Démonstration que f est impaire et T.V de f:

$D_f=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$, alors: f est une fonction impaire.

les variations de f:

$$f'(x)=\frac{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}+e^{-x})-(e^{x}-e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

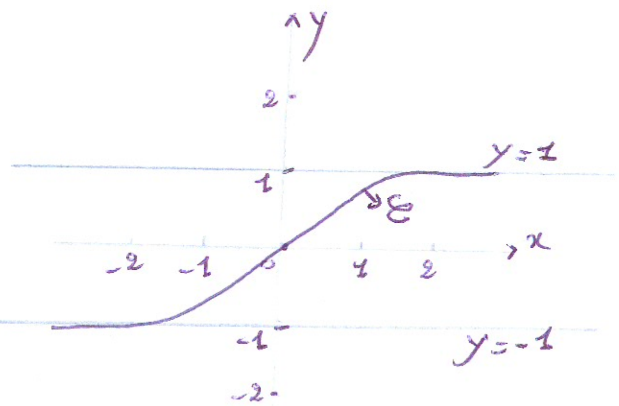
$$=\frac{(e^{2x}+2e^{-x}e^{x}+e^{-2x})-(e^{2x}-2e^{-x}e^{x}+e^{-2x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{4e^{-x}e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}\geq 0$$

Alors: f a le tableau suivant:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1$

c- la courbe:



d) Calcul de A, l'aire du domaine plan limité par la courb(C), l'axe (ox), et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 3$, on remarque (C) est au dessus de l'axe (ox) sur $[0,\ln 3]$

$$A=\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx=\int_0^{\ln 3}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

$$=\left[\ln(e^{x}+e^{-x})\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\ln\left(3+\tfrac{1}{3}\right)-\ln(1+1)=\ln\tfrac{5}{3}$$

② on définit la suite numérique (U_n) par $U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt$

a)- calcul de $U_1 = ?$

$U_1 = \int_0^{\ln 3} f(t)\,dt = A = \frac{I}{3}$

b)- Mq : pour tout n, on a :

$0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$:

on sait que f est ↗ sur l'intervalle $[0, \ln 3]$.

Alors : $\forall t \in [0, \ln 3]$.

$f(0) \leq f(\ln 3) \Rightarrow 0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\ln 3} 0\,dt \leq \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt \leq \int_0^{\ln 3} \left(\frac{4}{5}\right)^n dt$

$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n [t]_0^{\ln 3}$

Donc : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$

Comme : $\lim_{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \Rightarrow$ alors : d'après le T.G : $\lim_{+\infty} U_n = 0$

c) Vérifions que pour tout $x \geq 0$

$1 - f'(x) = (f(x))^2$

$1 - f'(x) = 1 - \frac{4e^{-x}e^{x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4e^{-x}e^{x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2e^{-x}e^{x} + e^{-2x} - 4e^{-x}e^{x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \frac{e^{2x} - 2e^{-x}e^{x} + e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = (f(x))^2$

Mq : $\forall n \geq 0,\ U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$U_{n+2} - U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^{n+2} dt - \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt$

$= \int_0^{\ln 3} \left[(f(t))^{n+2} - (f(t))^n\right] dt$

$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t)\left[(f(t))^2 - 1\right]\right) dt$

$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t) \times \left[-f'(t)\right]\right) dt$

$= -\int_0^{\ln 3} f'(t) \times \left[f^n(t)\right] dt$

$= \left[-\frac{1}{n+1} f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$

$= \frac{-1}{n+1}\left[(f(\ln 3))^{n+1} - (f(0))^{n+1}\right]$

$= \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Alors : $\forall n \geq 0,\ U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

d) pour tout $n \geq 0$:

. Mq : $U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

on applique la relation démontrée dans la question 2/c) :

$\forall k \geq 2,\ U_k - U_{k-2} = \frac{-1}{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

pour les termes consécutifs d'indices pairs de la suite (U_n), termes d'indices $k = 2p$ et $k-2 = 2p-2$

$p \in \mathbb{N}^*$

Donc : $\forall p \geq 1$

$U_{2p} - U_{2p-2} = \frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

$p=1: \cancel{U_2}-U_0=\frac{-1}{2\times1-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times1-1}$

$p=2: \cancel{U_4}-\cancel{U_2}=\frac{-1}{2\times2-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times2-1}$

$p=3: \cancel{U_6}-\cancel{U_4}=\frac{-1}{2\times3-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times3-1}$

... ... = ...

... ... = ...

... ... = ...

$=2n \quad U_{2n}-\cancel{U_{2n-2}}=\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n-1}$

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient :

$U_{2n}-U_0=\sum_{p=1}^{n}\frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$ or :

$U_0=\int_0^{\ln 3}(f(t))^0\,dt=[t]_0^{\ln 3}=\ln 3$

Donc $U_{2n}=\ln 3-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

Mq : de m que $U_{2n+1}=\ln\frac{5}{3}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$

on applique la relation démontrée dans la question 2), c) :

$\forall k\geq 2,\ U_k-U_{k-2}=\frac{-1}{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$ pour les termes ~~de~~ successifs d'indices impaires de la suite (U_n), termes d'indices, $k=2p+1$ ~~et~~ et $k-2=2p-1$ avec $p\in\mathbb{N}^*$

donc : $U_{2p+1}-U_{2p-1}=\frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$

$\forall p\geq 1$

alors :

$p=1: \cancel{U_3}-U_1=\frac{-1}{2\times1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times1}$

$p=2: \cancel{U_5}-\cancel{U_3}=\frac{-1}{2\times2}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times2}$

$p=3: \cancel{U_7}-\cancel{U_5}=\frac{-1}{2\times3}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times3}$

... ... = ...

... ... = ...

... ... = ...

$p=2n \quad U_{2n+1}-\cancel{U_{2n-1}}=\frac{-1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient :

$U_{2n+1}-U_1=\sum_{p=1}^{n}\frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$ or :

$U_1=\ln\frac{5}{3}$

Donc $U_{2n+1}=\ln\frac{5}{3}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$

d) pour tout $n>0$ on pose :

$S_n=\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\dots\frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)$

$=\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$

Calcul de limite de S_n :

on a : $S_n=\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

or : d'après : la question 2) d) on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} = -U_{2n+1} + \ln 5/3$$

Alors : $S_n = -U_{2n} + \cancel{\ln 3} - U_{2n+1} + \ln 5 \cancel{- \ln 3}$

Et, comme $\lim_{+\infty} U_n = 0$, alors :

$$\boxed{\lim_{+\infty} S_n = \ln 5}$$

Bac 2014

S.N

Exo 1

Complexe

- Nom : N'Guiya Habib
N° : 1188 ; classe : 7e C

Bac : 2014 . S.N

Ex(1) : Nombres complexes :
La 5ème fois :

Solution : on a :

$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$

① $P(2i) = ?$

$P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2)(2i)$
$-2i$

$= -8i - 4(1-2i) + (2i)(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$\therefore P(2i) = 0$

. Les Solutions : z_0, z_1 et z_2

Par tableau d'horner :

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\therefore \forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{z = 2i}$ $\quad \Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$\Leftrightarrow (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\}$

$I_m(2i) \geq I_m(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) \geq I_m(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})$

$\therefore \boxed{z_0 = 2i}$; $\boxed{z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

② a) on a : $B(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Soit $M(x, y)$, $M \in (BC)$

$\Leftrightarrow \det(\vec{BM}, \vec{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x + \frac{1}{2} & 0 \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}(x + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0$

b) $z = -\frac{1}{2} + iy / y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

or : $z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

D'où :

$z' = \frac{1}{(-\frac{1}{2} + iy + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$ Donc : M est sur l'axe des abscisses.

③ a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z^2| + \bar{z}}$

Donc : si $|z| = 1$ alors :

$|z|^2 = 1$. d'où : $f(z) = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

Sujet : Bac : 2014 . S.N Ex(1) . ①/② La 5ème fois

b) Si : $z = e^{i\theta}$ alors : $\bar{z} = e^{-i\theta}$

et $|z| = 1$

Donc : $f(z) = \dfrac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$

$$\boxed{= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta} = f(z)}$$

Exor 2015

S.C

Nom : N'Guiya / Habib
N° : 1188 , classe : 7°C

Bac : 2015 . S.C Ex (5) :

Solution : La 5ème fois :

Soit $f(x) = x\ln(x+1)$ de courbe $\mathcal{C}$.

① a)- Justifions que :

$\lim_{-1^+} f(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$ $\boxed{x=-1 \text{ . A.V}}$

$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty \times +\infty = +\infty$

b)- calculons : $f'(x)$:

$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

Justifions que :

$-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

$x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

x	-1 0 $+\infty$
$\ln(x+1)$	$-$ 0 $+$
$\frac{x}{x+1}$	$-$ 0 $+$
$f'(x)$	$-$ $+$

c)- T.V de f :

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$

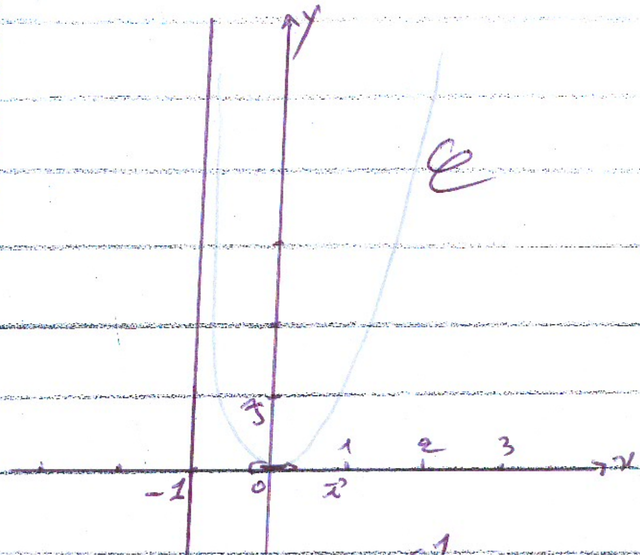
② - La courbe $\mathcal{C}$ de f :

Branche infinies :

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x\ln(x+1)}{x}$

$= \lim_{+\infty} \ln(x+1) = +\infty$

$\mathcal{C}$ admet une B.P // (oy)



b)- calculons : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = -\frac{1}{2} + \ln 2$

c) $\mathcal{A} = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$, on pose :

$\begin{cases} U'(x) = x \\ V(x) = \ln(1+x) \end{cases}$ $\begin{cases} U(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ V'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$

$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

③ $\forall x \geq 1$, $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$

a) Mq : (U_n) est définie $\forall t\in[0,1]$
$t \to t^n \ln(1+t)$ est continue
produit de 2 fonctions continues.

Justifions que : $U_1 = \frac{1}{4}$

$U_1 = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \mathcal{A} = \frac{1}{4}$

b) Mq : $\forall n \geq 1,\ 0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

on a : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$

$\Rightarrow 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2$

$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \leq \ln 2 \int_0^1 x^n\,dx$

$0 \leq U_n \leq \ln 2 \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1$

$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

on en déduit que : $\lim_{+\infty} U_n = 0$

Car : $\lim_{+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$

(4) $\forall n \geq 2,\ \forall x \in [0,1]$ on pose :

$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$

a) Justifions que : $S_n = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$

on rappelle que :

$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$S_n(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n$

$= 1 + (-x)^1 + (-x)^2 + \dots + (-x)^n$

$= \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

$= \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$

b) Mq : $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \times \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$1 - x + x^2 + \dots + (-x)^n = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$

intégrons entre 0 et 1

$\int_0^1 1 - x + x^2 + \dots + (-x)^n\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$= [\ln x]_0^1 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

$= \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

c) Mq :

$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$

$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$

on pose :

$\begin{cases} U'(x) = x^n \\ V(x) = \ln(1+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \\ V'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$

$U_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

or : $(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$

$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$

Sujet : Bac : 2015 . S.C . Ex (5)   (2) / (3) La 3eme fois

$$\boxed{U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right]}$$

(5) $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

a) Mq : $\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$

$\int_0^1 \frac{1}{2} x^{n+1} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$

$\left[\frac{1}{2(n+2)} x^{n+2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2}\right]_0^1$

$\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$

b) En déduire que : $\lim_{+\infty} V_n = \ln 2$

On remarque :

$V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

or : $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

$V_n = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

Comme : $\lim_{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = 0$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} V_n = \ln 2$

Déduisons que :

$\lim_{+\infty} (n+1) U_n$

on a : $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right]$

$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - V_n\right]$

$(n+1) U_n = \ln 2 - (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - V_n\right]$

$\boxed{\lim_{+\infty} (n+1) U_n = \ln 2}$

Exo 3 Bac 2014

S.C

Nom : N'Guiya / Habib
N° : 1188 , classe : 7°C

Bac : 2014 . S.C Ex(3) :

Solution : La 5ème fois :

① $\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) = -x^2 - \ln x$

ⓐ . $\lim\limits_{0^+} g(x) = \lim\limits_{0^+} (-x^2 - \ln x) = +\infty$

. $\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} (-x^2 - \ln x) = -\infty$

$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0$, $\forall x \in]0,+\infty[$

T.V de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		$+\infty \searrow -\infty$	

b) Comme g est continue et strictement montone sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et, comme elle chang de sing, l'équation $g(x)=0$, admet donc une ! Solution α dans $]0,+\infty[$.

Et, comme $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1}{e^2} + 1 = \frac{e^2-1}{e^2} > 0$

et $g(1) = -1 < 0$

on a : donc : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

② $\forall x \in]0,+\infty[$

$f(x) = -x + \cancel{1} + \frac{1}{x}(1 + \ln x)$

ⓐ $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \left(-x + 1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \underbrace{(1+\ln x)}_{-\infty}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$

$\boxed{x = 0 : \text{A.V à } \mathcal{C}_f}$

ⓑ $\lim\limits_{+\infty} (f(x) - (1-x))$

$= \lim\limits_{+\infty} \left(\cancel{-x} + \cancel{1} + \frac{1}{x}(1 + \ln x) - \cancel{1} + \cancel{x}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$

$= 0 + 0 = 0$

$\boxed{y = 1 - x : \text{A.O à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty}$

c) $f'(x) = -1 + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x)}{x^2}$

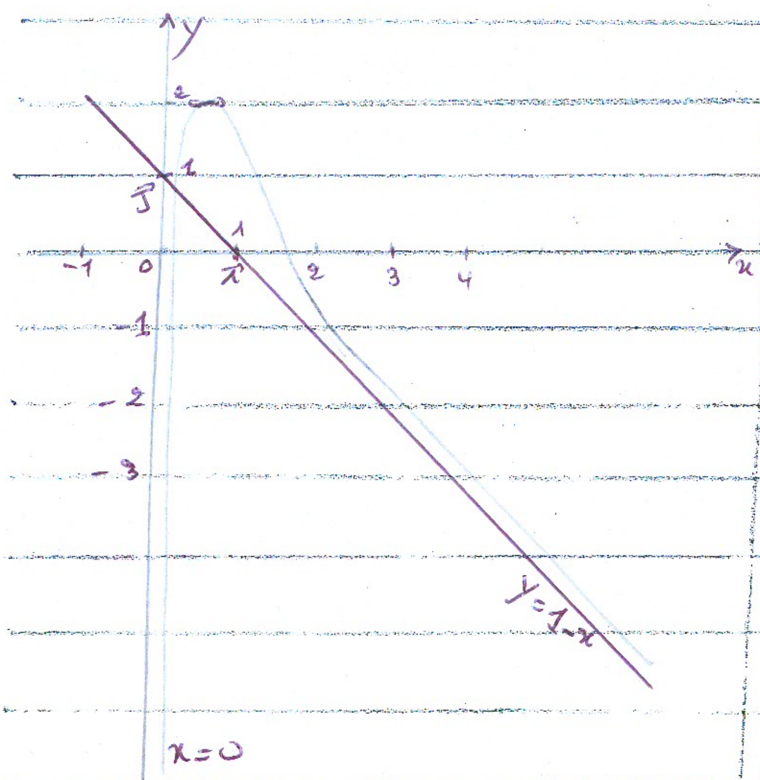
$= -1 + \dfrac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$

$= \dfrac{-x^2 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

T.V de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow -\infty$	

- d) - La courbe :



③ a) - $\lim\limits_{0^+} f_m(x) = \lim\limits_{0^+}\left(-x+1+\frac{m^2}{x}(1+\ln x - \ln m)\right)$

Et $\lim\limits_{+\infty}\left(f_m(x)-(1-m)\right) = \lim\limits_{+\infty} \frac{m^2}{x}(1+\ln x - \ln m)$

$= \lim\limits_{+\infty} m^2\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln m}{x}\right) = 0$

toutes les courbes $(\mathcal{E}_m)$ admettent donc : les mêmes asymptotes, $x=0$ et $y=1-x$ et qui se coupent en $G(0,1)$

b) une homothétie h de centre G et de rapport k transforme $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_m$ ssi :
$M(x,y) \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow h(M) = M'(x';y') \in \mathcal{E}_m$ - c-à-d : $f_1(x) = y$

$\Leftrightarrow f_m(x') = y'$, or : $h(M) = M'$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = k\,\overrightarrow{GM}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y'-1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky - k + 1 \end{cases}$

D'où : on doit avoir :

$f_1(x) = y \Leftrightarrow f_m(kx) = ky + 1 - k$

c-à-d : $f_m(kx) = k f_1(x) - k + 1$

c-à-d : $-kx + 1 + \frac{m^2}{kx}(1+\ln(kx) - \ln m)$

$= k\left(-x+1+\frac{1}{x}(1+\ln m)\right) - k + 1$

Ce qui équivaudra à :

$-kx + 1 + \frac{m^2}{kx}(1+\ln x - \ln k + \ln m)$

$= -kx + k + \frac{k}{x}(1+\ln x) - k + 1$

c-à-d : $\frac{m^2}{kx}(1+\ln x - \ln k + \ln m) = \frac{k}{x}(1+\ln x)$, D'où : par identification :

$k^2 = m^2$ et $\ln k = \ln m$, donc : $\boxed{k=m}$, $\mathcal{E}_m$ est donc : l'image de $\mathcal{E}_1$ par l'homothétie h_m de centre G et de rapport m.

c) T.V de f_m :

x	0		$m\alpha$		$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f_m(m\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$