FATIMETOU/

Med EL HAved

Bac 2014

FATIMÉTOU Med ELHAFEDH.
7c. Raya

Bac 2014

Exo1

1) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$= \boxed{P(2i) = 0}$

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Rightarrow z = 2i$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1-4 = -3 \Rightarrow 3i = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$Im(2i) \geq Im\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \geq Im\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a) on a $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x,y)$

$M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\vec{BM}, \vec{BC}) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + iy \setminus y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

D'où $z' = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + iy + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$

Donc M' est sur l'axe des abscisses

3-a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z^2| = 1$

d'où $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + 1 + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

b) Si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc $f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathcal{C}(0,1) \setminus \{B, C\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \frac{1}{(1+2\cos\theta)} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2 = \left(\frac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2 = \frac{1}{1+2\cos\theta} \end{cases}$

D'où $x'^2 + y'^2 = (2x-1)^2$

b) $\Gamma : x^2 + y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9}\right] - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

(Suite Exo1)

4-b) $\dfrac{(x-\frac{2}{3})^2}{(\frac{1}{3})^2} - \dfrac{x^2}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = 1$

$\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

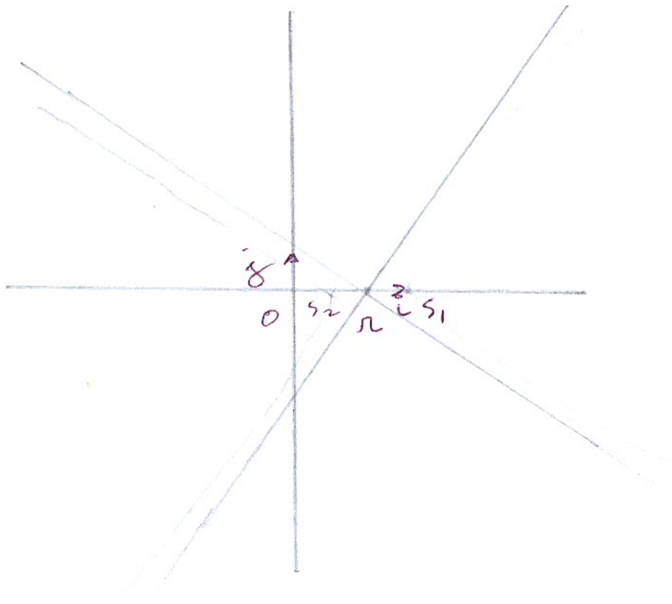
Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{2}{3}, 0)$ et de sommets

$S_1 : (\frac{2}{3}+\frac{1}{3}, 0) = (1,0)$ et

$S_2 : (\frac{2}{3}-\frac{1}{3}, 0) = (\frac{1}{3}, 0)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

et d'excentricité

$e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$



Exo2

1) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} xe^x = \boxed{0}$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} xe^x = \boxed{+\infty}$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

$f(-1) = -e^{-1} = -1/e$

T.V de f :

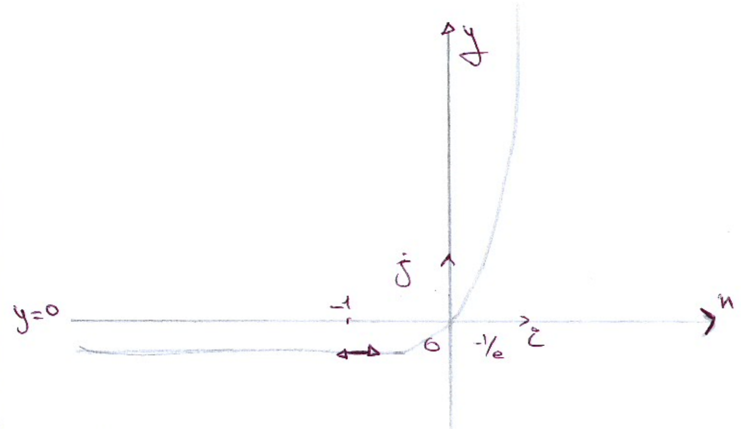
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $y = 0$ A.H à (C) au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$

à (C) admet une B.P // (y'y) au voisinage de $\boxed{+\infty}$

* $\mathcal{C} \cap (y'y) = (0,0)$
* $\mathcal{C} \cap (x'x) = (0,0)$



c) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x$

$= (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc, f est une solution de l'équation différentielle

$y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $\boxed{x=0}$ et $\boxed{x=1}$ et $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

or : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

Donc $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

Suite (EXO 2)

alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$$\text{cela} = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$
$$= [(x-1)e^x]_0^1$$

$\boxed{A = 1\ u.a}$

2-a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 x e^x\,dx$

or $\int_0^1 x e^x\,dx = 1$

$\boxed{\forall n \quad I_1 = -1}$

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$$|I_n| = \left|(-1)^n \cdot \int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$$
$$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$$

on ; $\forall x \in [0,1]$ $x^n e^x \geq 0$

D'où $\int_0^1 x^n e^x\,dx \geq 0$

Donc $\left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

D'où $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$$
$$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e.x^n$$
$$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leq e.\int_0^1 x^n\,dx$$
$$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e.\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$\boxed{\forall n \geq 1,\ \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}}$

or $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim \frac{e}{n+1} = 0$

d'après le T.G $\lim_{+\infty} |I_n| = 0$

Donc $\boxed{\lim_{+\infty} I_n = 0}$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 x^{n+1} e^x\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)\,x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1}\left([x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx\right)$$
$$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$$
$$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$$
$$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^n(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$$
$$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n\int_0^1 x^n e^x\,dx$$

$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n,\ \forall n \geq 1}$

3) d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1}\,dx$

	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$$J = \int_0^1 \frac{(x^2+3x-6)\cancel{(x+1)}e^x}{\cancel{(x+1)}}\,dx$$
$$= \int_0^1 (x^2+3x-6)e^x\,dx$$
$$= \int_0^1 x^2 e^x\,dx + 3\int_0^1 x e^x\,dx - 6\int_0^1 e^x\,dx$$
$$= (-1)^2\int_0^1 x^2 e^x\,dx - 3 \times (-1)\int_0^1 x e^x\,dx - 6[e^x]_0^1$$
$$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$$

Or : $I_1 = -1$ et $I_2 = (-1)^2 e + 2I_1 = e - 2$

D'où $J = (e-2) - 3\times(-1) - 6(e-1) =$
$e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\boxed{J = 7 - 5e}$

Exo3

1-a) On a $f(0)=0$ et $\lim\limits_{0^+} f(x) =$

$= \lim\limits_{0^+} x\ln(1+\frac{1}{x})$

$= \lim\limits_{0^+} x(\ln(x+1)-\ln x)$

$= \lim\limits_{0^+} (x\ln(x+1) - x\ln x)$

$= 0 - 0 = 0$

Donc $\lim\limits_{0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{x\ln(1+\frac{1}{x})-0}{x-0}$

$= \lim\limits_{0^+} \dfrac{\cancel{x}\ln(1+\frac{1}{x})}{\cancel{x}} = \lim\limits_{0^+} \ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$

f n'est donc pas dérivable à droite en 0 et la courbe $\mathcal{C}$ de f admet, au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

c) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \overset{+\infty}{x}\, \ln\overset{0}{(1+\frac{1}{x})}$. F.I

On pose $\boxed{t = \frac{1}{x}}$

alors $\lim\limits_{+\infty} t = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $x = \frac{1}{t}$

$\lim\limits_{+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{0^+} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1}$

Donc : $y=1$ A.H. à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$

2-a) $\forall x>0$; $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$

$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$\ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$= \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$

$f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-\cancel{x}-1+\cancel{x}}{x(x+1)^2}$ $\boxed{f''(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)^2}}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)^2} < 0$, $\forall x>0$

Donc f' est $\searrow$ sur $]0,+\infty[$

or : $\lim\limits_{+\infty} f'(x) = \lim\limits_{+\infty} \left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right)$

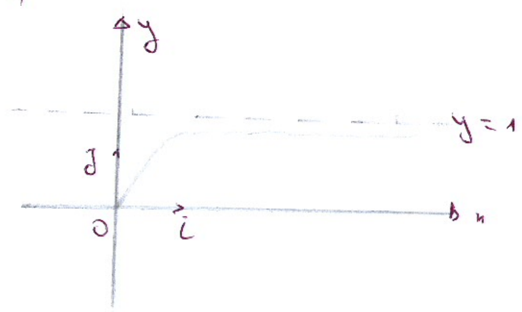
$0 - 0 = 0$

$\boxed{\text{D'où } \forall x>0,\ f'(x)>0}$

b) T.V de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	1

c)



3-a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$

montrons que f_n est continue sur $[0,1]$

- sur $]0,1]$ $f_n(x) = x^n\ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonctions $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \ln(1+\frac{1}{x})$ continues sur $]0,1]$ d'où

f_n est continue sur $]0,1]$

- Etudions la continuité de f_n à droite en 0

$\lim\limits_{0^+} f_n(x) = \lim\limits_{0^+} x^n\ln(1+\frac{1}{x})$

(Suite de Exo 3)

$= \lim_{0^+} (x^n \ln(x+1) - x^n \ln x) = 0 - 0 = 0$

$f_n(0)$

D'où f_n est continue à droite en 0.

Donc f_n est continue sur $[0,1]$ et l'intégrale

$A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette écriture

définie bien une suite numérique.

b) D'après le T.V de fonction définie dans la question ① on a $\forall x \geq 0$, $0 \leq f(x) < 1$

D'où en multipliant par x^{n-1}

on a $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

Or $\forall x \in [0,1]$; $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

D'où $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \geq 1,\ 0 \leq A_n \leq 1/n}$

c) $\boxed{\lim_{+\infty} 1/n = 0}$

D'où d'après le T.G $\boxed{\lim_{+\infty} A_n = 0}$

1) a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\int_\alpha^1 x^n\,dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln \alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$

$$\boxed{I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln \alpha - \frac{1}{(n+1)^2}}$$

b) $\lim I(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1^{n+1}}{n+1} \ln x \frac{-1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1} (\alpha \ln \alpha) - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 0 - 0 \times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}}$$

c) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1) x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on obtient $v(x)$ en utilisant une I.P.P

$J_{n+1} = \left[x^{n+1}((x+1)\ln(x+1) - x)\right]_0^1$

$- (n+1)\int_0^1 x^n \int_0^1 (x^{n+1} + x^n)\ln(x+1)\,dx$

$+ (n+1)\int_0^1 x^{n+1}\,dx$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1) + x^n \ln(x+1)) + (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 x^{n+1} \ln x\,dx + \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

$(n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1} + J_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$

Donc :

$J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1) J_{n+1} - (n+1) J_n - \frac{1}{n+1}$

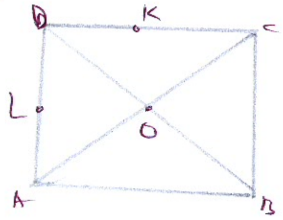
$J_{n+1} + (n+1) J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1) J_n$

$(n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

$$= \boxed{J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}J_n}$$

|Exo 4|

1)



2) Comme $BL^2 = BA^2 + AC^2 = a^2 + (a/2)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

et $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + (a/2)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Donc $BL = AK \neq 0$

D'autre part

$(\vec{AK}, \vec{BL}) \neq 0\ [2\pi]$.

Donc il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Et comme med[AB] = (OK) et med[KL] = (BD) et $(OK) \cap (BD) = \{O\}$

le centre de r est donc le point O.

un angle de r est $(OA, OB) = \pi/2\ [2\pi]$.

3-a) Comme $D \neq B$ et $L \neq O$, il existe une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O.

le rapport de f_1 est

$$\frac{OL}{BD} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

et un angle de f_1 est :

$(\vec{BD}, \vec{OL}) = \pi/4\ [2\pi]$

b) Comme $f_1(P) = P$ et $f_1(B) = O$

on a donc $(PB, PO) = \pi/4\ [2\pi]$.

D'où $(PB, PO) = (AB, AO) = \pi/4\ (\neq 0)\ [\pi]$

Donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle OAB c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre [AB].

De même : comme $f_1(P) = P$ et $f_1(D) = L$

on a $(PD, PL) = \pi/4\ [2\pi]$

or $(OD, OL) = \pi/4\ [2\pi]$.

D'où $(PD, PL) = (OD, OL) = \pi/4\ [\neq 0]\ [\pi]$

Donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle ODL c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre [OD]

On constate que le point O est commun aux cercles de diamètre [AB] et [OD]

mais qu'il n'est pas le centre de f_1 (car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$). Le point P est donc le second point commun à ces deux cercles (autre que O).

3) b)

Montrons que P est le point d'intersection de (BL) et (AK). $(\vec{PB}, \vec{PL}) = (\vec{PB}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PL})$

$= (AB, AO) + (DO, DL)\ [\pi]$

$= \pi/4 - \pi/4 = 0\ [\pi]$

$\boxed{\text{Donc } P \in (BL)}$

De même

$(\vec{PA}, \vec{PK}) = (\vec{PA}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PK})$

$= (\vec{BA}, \vec{BO}) + (\vec{DO}, \vec{DK})\ [\pi]$

$= -\pi/4 + \pi/4 = 0\ [\pi]$

$\boxed{\text{Donc } P \in (AK)}$

P est donc le point d'intersection de (BL) et (AK).

4) Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$

un angle de f_2 est :

$(\vec{BO}, \vec{DL}) = (\vec{BD}, \vec{DB}) + (\vec{DB}, \vec{DL})$

$= \pi - \pi/4 = \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$

Et le rapport de f_2 est

$\frac{DL}{BO} = \frac{a/2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont deux similitudes directs et de même angle et transforment le point B en même point. L (car $f_2 \circ f_1(B)$

$= f_2(f_1(B)) = f_2(O) = L$ et

$f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = \boxed{f_1(D) = L}$

Donc $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$

Le centre de f_2 est donc celui de f_1 c'est-à-dire le point P.

5-a) $h = f_1 \circ f_2$ est le composé de deux similitude direct dont le produit des rapport est $-\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ $(\neq 1)$ et donc la somme de angle est $\pi/4 + \frac{3\pi}{4} = \pi$ $[2\pi]$

t ayant même centre P d'où est une homothéie de centre et de rapport $-\frac{1}{4}$

or $h(P) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$

D'où $= \vec{PL} = -\frac{1}{4}\vec{PB}$

Donc $4\vec{PL} + \vec{PB} = 0$

$\boxed{\text{D'où } P = \text{bar} \begin{array}{c|c} B & L \\ \hline 1 & 4 \end{array}}$

b) $P = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} B & D & A \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array}$

or $B = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$

D'où $P = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|c|c} A & C & D & D & A \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}$

$\Rightarrow P = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & C & D \\ \hline 3 & 1 & 1 \end{array}$

$\Rightarrow \boxed{P = \text{bar} \begin{array}{c|c} A & K \\ \hline 3 & 2 \end{array}}$

Partie B

1) $r = S_1 \circ S_2$ est composée de deux reflexions de plans perpendiculaires dont la droite d'intersection est (AD).

D'où r est le demi-tour d'axe (AD).

2) $t = S_3 \circ S_4$ est composée de deux reflexions de plans parallèles D'où t est une translation de vecteur de t est : $2\vec{DA}$

3) $f = r \circ t$ est composée d'une translation et d'une rotation telles que le vecteur de translation est un vecteur directeur de l'axe de la rotation D'où : f est le vissage d'axe d'angle π et de vecteur $2\vec{DA}$