Nom : Ahmed Saleck O. teyib
classe : 7C
Matricule : 1369

Corrigés de Bac 2014

Session Normale

Nom : El Alem % Eddaha
classe : 7C
Matricule : 1278

Exercice (01) :

1°) $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$\therefore P(2i) = 0$

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	$\downarrow$	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

$\therefore \forall Z \in \mathbb{C} : P(Z) = (Z-2i)(Z^2+Z+1)$

$P(Z) = 0 \iff (Z-2i)(Z^2+Z+1) = 0$

$\iff Z = 2i$ ou $Z^2 + Z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\}$

$I_m(2i) \geq I_m(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) \geq I_m(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})$

$\therefore Z_c = 2i$, $Z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2°) a°) on a : $B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Soit $M(x,y)$

$M \in (BC) \iff \det(\vec{BM}, \vec{BC}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\iff -\sqrt{3}(x+\frac{1}{2}) = 0 \iff x + \frac{1}{2} = 0 \iff$

$2x + 1 = 0$

b°) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\iff z = -\frac{1}{2} + iy \,/\, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

or : $Z' = \frac{1}{Z^2+Z+1} = \frac{1}{(Z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

D'où : $Z' = \frac{1}{(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$

donc M' est sur l'axe des abscisse

3°) a°) $f(z) = \frac{1}{\quad} = \frac{\bar{z}}{\quad}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$

d'où $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + 1 + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

b°) si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc $f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

4°) a°) $M \in \mathcal{C}(0,1) \setminus \{B, C\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow Z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ (2x'-1)^2 = \left(\frac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1\right)^2 = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$

d'où : $x'^2 + y'^2 = (2x-1)^2$

b°) $\Gamma : x^2 + y^2 = (2x-1)^2$

$\iff x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$\iff 3x^2 - 4x - y^2 = -1$

$\iff 3(x^2 - \frac{4}{3}x) - y^2 = -1$

$\iff 3\left[(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}) - \frac{4}{9}\right] - y^2 = -1$

$\iff 3(x - \frac{2}{3})^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$\iff \frac{(x - 2/3)^2}{1/9} - \frac{y^2}{1/3} = 1$

$\Gamma : \frac{(x-2/3)^2}{(1/3)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3}/3)^2} = 1$

$\therefore \Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = 1/3$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

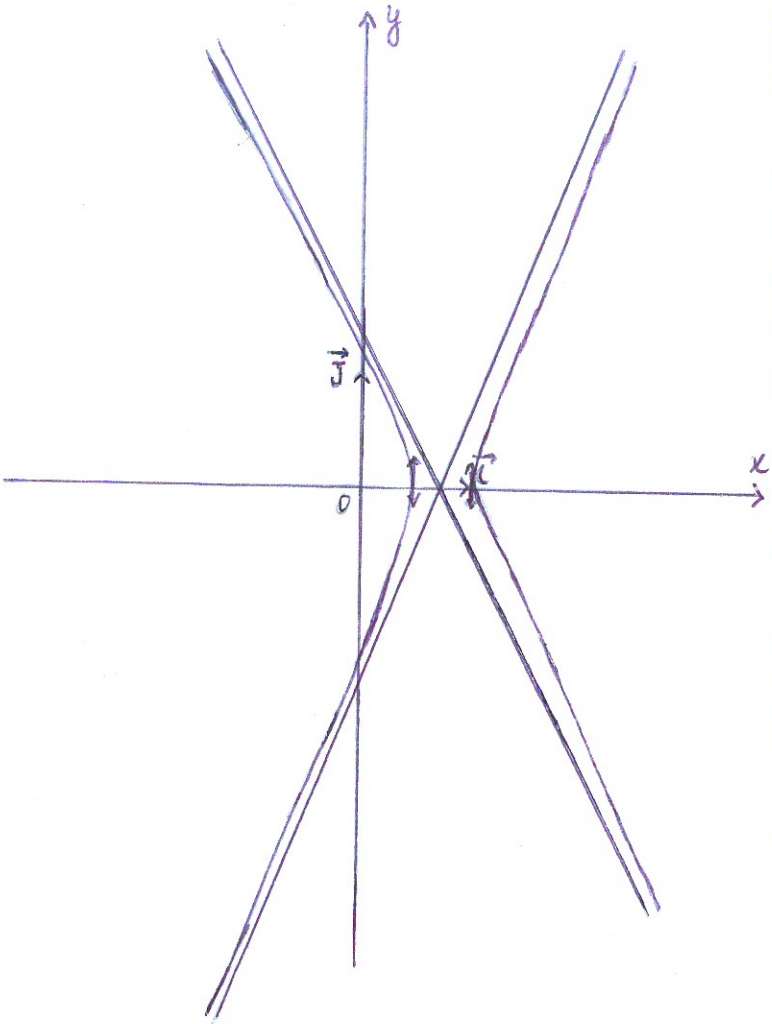
Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega(2/3, 0)$ et de sommets

$S_1 : (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}, 0) = (1, 0)$ et

$S_2 : (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}, 0) = (\frac{1}{3}, 0)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité

$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{2/3}{1/3} = 2$

Exercice (01) : (suite)



Exercice (02) :

1) a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

f est continue et derivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$.

$f'(x) = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

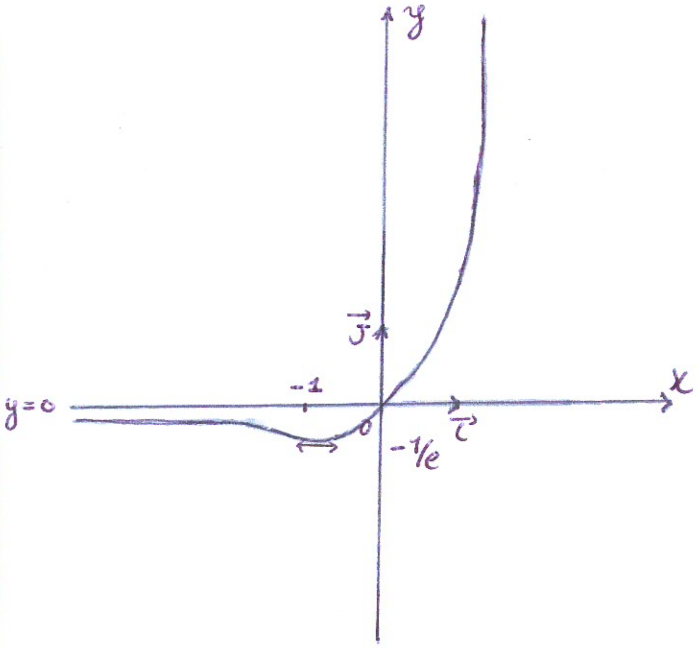
b) * $y = 0$; A.H. à (C) au voisinage de $-\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

∴ (C) admet une B.P // $(y'y)$ au voisinage de $+\infty$

* $\mathcal{E} \cap (y'y)$: $(0, 0)$

* $\mathcal{E} \cap (x'x)$: $(0, 0)$



c) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x$

$= (x + 2 - 2x - 2 + x)e^x = 0$

Donc : f est une solution de l'équation différentielle.

Exercice (02) : (Suite)

d) L'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

or : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \geq 0$

d'où : $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x e^{x}\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{x} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{x} \end{cases}$

$$\therefore\ \mathcal{A} = [x e^{x}]_0^1 - \int_0^1 e^{x}\,dx$$

$$= [x e^{x}]_0^1 - [e^{x}]_0^1$$

$$= [(x-1)e^{x}]_0^1$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 1\ u.a}$$

2) a) $I_1 = (-1)^1 \cdot \int_0^1 x e^{x}\,dx$

or : $\int_0^1 x e^{x}\,dx = 1$

D'où $\boxed{I_1 = -1}$

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^{x}\,dx$

donc $|I_n| = |(-1)^n| \cdot \left|\int_0^1 x^n e^{x}\,dx\right|$

$$= 1 \times \left|\int_0^1 x e^{x}\,dx\right|$$

or ! $\forall x \in [0,1],\ x^n e^{x} \geq 0$

d'où : $\int_0^1 x^n e^{x}\,dx \geq 0$

Donc : $\left|\int_0^1 x^n e^{x}\right| = \int_0^1 x^n e^{x}\,dx$

D'où : $|I_n| = \int_0^1 x^n e^{x}\,dx$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^{x} \leq e$$

$$\Rightarrow x^n \leq x^n e^{x} \leq e \cdot x^n$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n e^{x}\,dx \leq e \cdot \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}}$$

$\therefore$ or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'où d'après le T.G, $\lim_{n \to +\infty} |I_n| = 0$

donc : $\lim_{n \to +\infty} = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 x^{n+1} e^{x}\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{x} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^{x} \end{cases}$

$$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \left([x^{n+1} e^{x}]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^{x}\,dx \right.$$

$$= (-1)^{n+1}(e - 0 - (n+1))\int_0^1 x^n e^{x}\,dx$$

$$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^{x}\,dx$$

$$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^{x}\,dx$$

$$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n,\ \forall n \geq 1}$$

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)e^{x}}{x+1}\,dx$

	1	4	−3	−6
−1	↓	−1	−3	6
	1	3	−6	0

$$\therefore\ J = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x - 6)\cancel{(x+1)}e^{x}}{\cancel{(x+1)}}\,dx$$

$= \int_0^1 x^2 e^x dx + 3\int_0^1 x e^x dx - 6\int_0^1 e^x dx$

$= (-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x dx - 3\times(-1)\int_0^1 x e^x dx - 6\left[e^x\right]_0^1$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

or : $I_1 = -1$ et $I_2 = (-1)^2 e + 2I_1 = e - 2$

D'où : $J = (e-2) - 3\times(-1) - 6(e-1)$

$= e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\boxed{J = 7 - 5e}$

Exercice (03) :

1) a) on a ; $f(0) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+\frac{1}{x})$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln(x+1) - \ln x)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(x+1) - x\ln x)$

$= 0 - 0 = 0$

Donc ; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où ; f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x}) - 0}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$

f n'est pas derivable à droite en 0 et la courbe $\mathcal{C}$ de f admet au point d'absisse, une demi-tangente verticale.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \overset{+\infty}{x}\, \overset{0}{\ln(1+\frac{1}{x})}$ F.I.

on pose $t = \frac{1}{x}$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} t = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $x = \frac{1}{t}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\therefore \boxed{\lim f(x) = 1}$

Donc : $\boxed{y = 1 : A.H \text{ à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty.}$

2) a) $\forall x > 0,\ f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$

$\therefore f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$= \ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$= \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$

$\therefore f''(x) = \frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-\cancel{x} - 1 + \cancel{x}}{x(x+1)^2}$

$\therefore \boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0,\ \forall x > 0$

Donc f' est ↘ sur $]0, +\infty[$

or : $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right)$

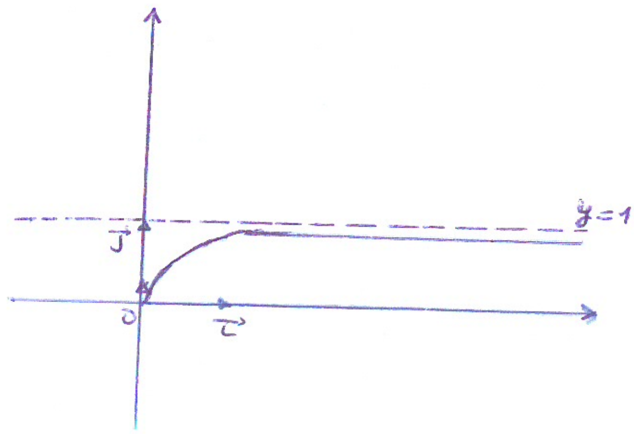
$= 0 - 0 = 0$

D'où $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) > 0}$

b) T.V de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	0	↗	1

c)



3°) a°) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$.

Montrons que f_n est continue sur $[0,1]$.

- Sur $]0,1]$, $f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonctions $x \longmapsto x^n$ et $x \longrightarrow \ln(1+\frac{1}{x})$ continues sur $]0,1]$ d'où f_n est continue sur $]0,1]$.

- Etudions la continuité de f_n à droite en 0.

$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{x\to0^+} x^n \ln(1+\frac{1}{x})$$

$$= \lim_{x\to0^+} x^n \ln(\frac{x+1}{x}) = \lim_{x\to0^+} x^n(\ln(x+1) - \ln x)$$

$$= \lim_{x\to0^+} (x^n \ln(x+1) - x^n \ln x) = 0 - 0 = 0$$

$$= f_n(0)$$

D'où f_n est continue à droite en 0.

donc : f_n est continue sur $[0,1]$ et l'intervale $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ existe et cette ecriture definit bien une suite numérique (A_n)

b°) D'apres le T.V. de la fonction définie dans la question ① on a :

$\forall x \geq 0$, $0 \leq f(x) < 1$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c°) $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

or : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où, $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 x^{n-1} dx$

d'où : $0 \leq A_n \leq [\frac{x^n}{n}]_0^1$

donc : $\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}}$

or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où d'apres le T.G. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = 0}$

4°) a°) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\, dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$$\therefore I_n(\alpha) = [\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1} \int_\alpha^1 x^n dx$$

$$= [\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1} [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_\alpha^1$$

$$= [\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}]_\alpha^1$$

$$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\therefore \boxed{I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}}$$

b°) $\lim_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha) = \lim_{\alpha\to0^+} (\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$= 0 - 0\times0 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}}$$

c°) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on obtient $v(x)$ en utilisant une I.P.P

$$\therefore J_{n+1} = [x^{n+1}((x+1)\ln(x+1) - x)]_0^1$$

$$- (n+1) \int_0^1 x^n ((x+1)\ln(x+1) - x) dx$$

$= 2\ln 2 - 1 - \ldots$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1) + x^n \ln(x+1)) +$

$+ (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1$

$2\ln 2 - (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}\ln x dx + \int_0^1 x^n \ln(x+1) +\right.$

$+ (n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1} + J_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$

Donc :

$J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)J_{n+1} - (n+1)J_n - \frac{1}{n+2} - 1$

$\therefore J_{n+1} + (n+1)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

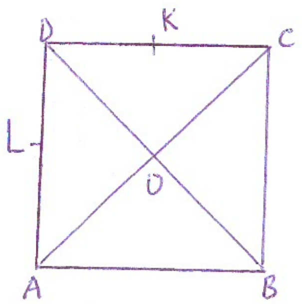
$\therefore (n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

$\therefore J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}J_n$

Exercice (04) :

Partie A:

1°)



2°) Comme $BL^2 = BA^2 + AC^2$

$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

et $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Donc $BL = AK \neq 0$

D'autre part

$(\vec{AK}, \vec{BL}) \neq 0\ [2\pi]$

Donc il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L.

Et comme méd $[AB] = [OK]$ et méd $[KL] = [BD]$

et $(DK) \cap (BD) = \{O\}$

le centre de r est donc le point O.

Un angle de r est $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3°) a°) Comme $D \neq B$ et $\neq O$, il existe une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O.

Le rapport de f_1 est

$\frac{OL}{BD} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

Et un angle de f_1 est :

$(\vec{BD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b°) Comme $f_1(P) = P$ et $f_1(B) = O$

on a donc ; $(\vec{PB}, \vec{PO}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

or : $(\vec{AB}; \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $(\vec{PB}, \vec{PO}) = (\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}\ (\neq 0\ [\pi])$

donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle OAB c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre [AB]

De même ; comme $f_1(P) = P$ et $f_1(D) = L$

on a : $(\vec{PD}; \vec{PL}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

or : $(\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

d'où : $(\vec{PD}, \vec{PL}) = (\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}\ (\neq 0\ [\pi])$

donc le point P appartient au cercle circonscrit au triangle ODL c'est-à-dire, que P appartient au cercle de diamètre [OD]. on constate que le point est commun aux cercles de diamètre [AB] et [OD] mais qu'il n'est pas le centre de f_1 (car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$);

le point commun à ces deux cercles (autre que o).

- Montrons que P est le point d'intersection de (BL) et (AK).

$(\vec{PB}, \vec{BL}) = (\vec{PB}, \vec{PO}) + (\vec{PO}, \vec{PL})$

$= (\vec{AB}, \vec{AD}) + (\vec{DO}, \vec{DL})\ [\pi]$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

donc $P \in (AK)$

P est donc le point d'intersection de (BL) et (AK).

1°) a°) Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$.

un angle de f_2 est :

$(\vec{BO}, \vec{DL}) = (\vec{BD}, \vec{DB}) + (\vec{DB}, \vec{DL})$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

Et le rapport de f_2 est :

$\frac{DL}{BO} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}$

b°) $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont deux même rapport et de même angle et transforment le point B en un même point L (car

$f_2 \circ f_1(B)$

$= f_2(f_1(B)) = f_2(O) = L$ et

$f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$

donc $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$

Le centre de f_2 est donc celui de f_1 c'est-à-dire le point P.

2°) a°) $h = f_1 \circ f_2$ est la composée de deux similitudes directes dont le produit des rapports est

$\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\ (\neq 1)$ et dont la ~~somme~~ des angles est $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi\ [2\pi]$

et ayant même centre P d'où h est une homothétie de centre et de rapport $-\frac{1}{4}$.

or : $h(P) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$

D'où $\vec{BP} = -\frac{1}{4}\vec{LB}$

donc : $4\vec{PL} + \vec{PB} = \vec{0}$

d'où ; $P = \text{bar}\begin{array}{|c|c|} B & L \\ 1 & 4 \end{array}$

b°) $P = \text{bar}\begin{array}{|c|c|} B & L \\ \hline 1 & 4 \end{array}$

$\Leftrightarrow P = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|} B & D & A \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$

or ; $B = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|} A & C & D \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$

d'où ;

$P = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|c|} A & C & D & D & A \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}$

$\Rightarrow P = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|} A & C & D \\ \hline 3 & 1 & 1 \end{array}$

$\Leftrightarrow P = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & K \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

Partie B :

1°) $r = S_1 \circ S_2$ est composée de deux réflexions de plans perpendiculaires dont la droite d'intersection est (AD).

d'où r est la demi-tangent d'axe (AD).

2°) $t = S_3 \circ S_4$ est composée de deux reflexions de plans parallèles d'où t est un translation le vecteurs de t est : $2\vec{DA}$

3°/ $f = r \circ t$ est composée d'une translation et d'une rotation telle que le vecteur de la translation est un vecteur directeur de l'axe de la rotation D'où : f est le vissage d'axe (DA), d'angle π et de vecteur $2\overrightarrow{DA}$.