2013 N

Ex4 :

1)_ $\forall x \in [0, +\infty[$ $\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

a)_ • $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 = g(0)$ alors g est continue en 0^+.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} - 3\ln x\right)$$

$$= +\infty(-\infty)$$

$$= -\infty.$$

b)_ $g'(x) = 3x^2 - 3\left(3x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^3\right)$

$$= 3x^2 - 9x^2 \cdot \ln x - 3x^2$$

$$= -9x^2 \cdot \ln x$$

$g'(x) = 0 \iff -9x^2 \cdot \ln x = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

le signe de g' est celui de l'opposé de $\ln x$

le T.V de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

1.c)- g est continue sur $[0,+\infty[$ puis il change Sont signe une seul fois dans $[0,+\infty[$ alors l'equation $g(x)=0$ admet une unique solution α

$g(1) = 1+1 = 2$.

$g(2) = 1+8-24\ln 2 = -7,63$ $\Rightarrow g(1).g(2) < 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{1 < \alpha < 2}$

le signe de g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2)- $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^3}$ $\forall x \in]0,+\infty[$.

a)- • $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (par la Croissance comparer).

b)- $\forall x \in]0,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^3) - 3x^2 \times \ln x}{(1+x^3)}$

$= \dfrac{\frac{1}{x} + x^2 - 3x^2 \ln x}{(1+x^3)^2}$

$= \dfrac{1+x^3 - 3x^3 \ln x}{x(1+x^3)^2}$

$= \dfrac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$ alors le signe de f' est celui de g.

Le T.V de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3)_ $x \in]1, +\infty[$: $F(t) = \int_1^x f(t)\,dt$

3.a)_ on a $f(t)$ est Continue $\forall t \in]1, +\infty[$
Car $f(t)$ nest pas partagé et on a : 1 et x sont derivable sur $]1, +\infty[$ alors $F(t)$ est derivable sur $]1, +\infty[$
$F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) \geq 0 \; \forall x \in]1, +\infty[\Rightarrow F(x)$ est croissant.

3.b)_ $\forall t \geq 1$ on a : $t^3 \geq t^3 \geq t^3$
$\Rightarrow t^3 + 1 \geq t^3 + 1 \geq t^3 \Rightarrow t^3 + 1 + 3t^2 + 3t \geq t^3 + 1 \geq t^3$
$(t+1)^3 \geq t^3 + 1 \geq t^3 \Rightarrow \frac{1}{(t+1)^3} \leq \frac{1}{t^3+1} \leq \frac{1}{t^3}$

on a : $\forall t \geq 1 \Rightarrow \ln(t) \geq 0$

$$\boxed{\frac{\ln t}{(t+1)^3} \leq \frac{\ln(t)}{t^3+1} \leq \frac{\ln t}{t^3}}$$

3.c)_ $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt$ (I.P.P) :

$\begin{cases} U(x) = \ln t \\ V'(x) = \frac{1}{t^3} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} U'(x) = \frac{1}{t} \\ V(x) = \frac{-1}{2t^2} \end{cases}$

c) - $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt = \left[-\frac{\ln t}{2t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{2t^3}\,dt$

$$= \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{\ln 1}{2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right)$$

$$\boxed{\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}}$$

3.d) - $\displaystyle\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(t+1)^2}$

$$= \frac{a(t+1)^2}{t(t+1)^2} + \frac{b\cdot t(t+1)}{(1+t)^2\cdot t} + \frac{ct}{(t+1)^2\cdot t}$$

$$= \frac{a(t^2+2t+1)}{t(t+1)^2} + \frac{b(t^2+t)}{(t+1)^2\cdot t} + \frac{ct}{(t+1)^2\cdot t}$$

$$= \frac{a(t^2+2t+1) + b(t^2+t) + ct}{t(t+1)^2}$$

$$\frac{1}{t\cdot(1+t)^2} = \frac{t^2(a+b) + t(2a+b+c) + a}{t(t+1)^2}$$

Par identification

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ 2a+b+c = 0 \\ \boxed{a = 1} \end{cases} \Rightarrow \quad a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

$$c = -b-2a = +1-2 = -1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$$

4) a) on a : $\forall t \in [1, +\infty[$

$$\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3} \Rightarrow$$

$$\int_1^n \frac{\ln t}{(t+1)^3} dt \leq \int_1^n f(t) dt \leq \int_1^n \frac{\ln t}{t^3} dt$$

$\int_1^n \frac{\ln t}{(t+1)^3} dt$ on pose : $\begin{cases} U(n) = \ln t \\ V'(n) = \frac{1}{(t+1)^3} \end{cases}$ $\begin{cases} U'(n) = \frac{1}{t} \\ V(n) = \frac{-1}{2(t+1)^2} \end{cases}$

$$\int_1^n \frac{\ln t}{(t+1)^3} dt = \left[-\frac{1}{2(t+1)^2} \cdot \ln t \right]_1^n + \int_1^n \frac{1}{2} \times \frac{1}{(t+1)^2 \cdot t} dt$$

$$= \frac{-\ln n}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{t(t+1)^2} dt$$

$$= \frac{-\ln n}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

$$= \frac{-\ln n}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

$$= -\frac{\ln n}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2} \left[\ln(t) - \ln(t+1) + \frac{1}{1+t} \right]_1^n$$

$$= \frac{-\ln n}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2} \left(\ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\ln(1) - \ln(2) + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{-\ln n}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$+ \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{4}$$

on a :
$$\int_1^n \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt \leq F(t) \leq \int_1^n \frac{\ln t}{t^3}\,dt$$

$$-\frac{\ln n}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{4} \leq F(n) \leq$$
$$-\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln n}{2n^2}$$

$$\frac{-\ln n}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1-2\ln(2)}{4} \leq F(n) \leq -\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln n}{2n^2}$$

b) - $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n) = \ell$.

. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln n}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1-2\ln(2)}{4} = 0+0+0-\frac{1-2\ln}{4}$$
$$= -\frac{1-2\ln 2}{4}$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4} - \frac{1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2} = \frac{1}{4}.$$

Donc : $\boxed{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \leq \ell \leq \frac{1}{4}}$

$y = \ell$ A.H pour (C_F) au voisinage de $(+\infty)$.

Le T.V de F :

x	1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	e