Exercice 3 Bac 2011 SN

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

1) a- calcul de limites de f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}-1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)}$$

$$=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}(1-e^{-2x})}{e^{x}(1+e^{-2x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{1-0}{1+1}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=1}$$

Interpretation graphique:
la courbe de f admet deux asymptotes horizontales;
l'une d'equation $y=-1$ au voisinage de $-\infty$
l'autre d'equation $y=1$ ~~au voisinage~~ au voisinage de $+\infty$.

b) Démonstration que f est impaire et le tableau de variation de f

$D_f=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in D_f;\ -x\in D_f$

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$$

• ~~Les~~ Alors f est une fonction impaire.

Les variation de f

$$f'(x)=\frac{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}+e^{-x})-(e^{x}-e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$f'(x)=\frac{(e^{2x}+2e^{-x}e^{x}+e^{-2x})-(e^{2x}-2e^{-x}e^{x}+e^{-2x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

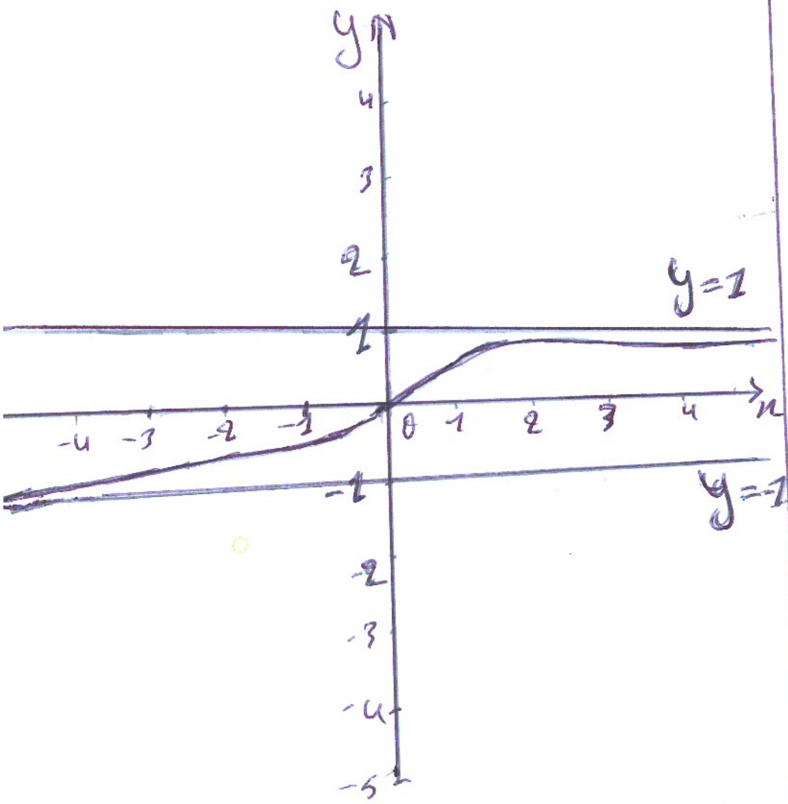
$$f'(x)=\frac{4e^{-x}e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}>0$$

Alors f a le tableau de variation suivant

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ 1

Suite Exercice 3
Bac 2011 SN

-) La courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm



d) calcul de A, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 3$; On remarque que (C) est au dessus de l'axe (Ox) sur $[0;\ln 3]$

$$A=\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\left[\ln(e^x+e^{-x})\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\ln\left(3+\frac{1}{3}\right)-\ln(1+1)=\ln\frac{5}{3}$$

$$\boxed{A=\ln\frac{5}{3}\ ua}$$

2) On définit la suite numérique (U_n) par

$$U_n=\int_0^{\ln 3}(f(t))^n\,dt$$

a) calcul U_1

$$U_1=\int_0^{\ln 3} f(t)\,dt=A=\ln\frac{5}{3}$$

$$\boxed{U_1=A=\ln\frac{5}{3}}$$

Suite Exercice 3 Bac 2011 SN

2) Montrons que pour entier naturel n, on a : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$:

On sait que f est croissante sur l'intervalle $[0; \ln 3]$

Alors $\forall t \in [0; \ln 3]$

$f(0) \leq f(t) \leq f(\ln 3) \Rightarrow 0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\Rightarrow \int_1^{\ln 3} 0\, dt \leq \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt \leq \int_0^{\ln 3} \left(\frac{4}{5}\right)^n dt$

$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n [t]_0^{\ln 3}$

Donc $\boxed{0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3}$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

alors d'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$

c) Vérifions que pour tout $n \geq 0$: $1 - f'(n) = (f(n))^2$:

$1 - f'(n) = 1 - \frac{4e^{-n}e^{n}}{(e^{n} + e^{-n})^2}$

$= \frac{(e^{n} + e^{-n})^2 - 4e^{-n}e^{n}}{(e^{n} + e^{-n})^2}$

$= \frac{e^{2n} + 2e^{-n}e^{n} + e^{-2n} - 4e^{-n}e^{n}}{(e^{n} + e^{-n})^2}$

$= \frac{e^{2n} - 2e^{-n}e^{n} + e^{-2n}}{(e^{n} + e^{-n})^2} = \frac{(e^{n} - e^{-n})^2}{(e^{n} + e^{-n})^2}$

$= (f(n))^2$

donc $\boxed{1 - f'(n) = (f(x))^2}$

• Montrons que $\forall n \geq 0$,

$U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$U_{n+2} - U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^{n+2} dt - \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt$

$= \int_0^{\ln 3} \left[(f(t))^{n+2} - (f(t))^n\right] dt$

$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t)[-f'(t)]\right) dt$

$= -\int_0^{\ln 3} (f'(t) \times f^n(t)) dt$

$= \left[-\frac{1}{n+1} f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$

Suite Exercice 3 Bac 2011 SN

$$= \left[-\frac{1}{n+2} f^{n+1}(t) \right]_0^{\ln 3}$$

$$= -\frac{1}{n+1} \left[(f(\ln 3))^{n+1} - (f(0))^{n+1} \right]$$

$$= \frac{-1}{n+1} \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1}$$

Alors $\forall n \geq 0$;

$$\boxed{U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1}}$$

1) pour tout entier naturel n strictement positive

. Montrons que $U_{2n} = \ln 3$

$$U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1} \left(\frac{4}{5} \right)^{2p-1}$$

On applique la relation démontrée dans la question 2) c):

$$\forall k \geq 2 \quad U_k - U_{k-2} = \frac{-1}{k-1} \left(\frac{4}{5} \right)^{k-1}$$

pour les termes consécutifs d'indices pairs de la suite (U_n); termes d'indices $k = 2p$ et $k-2 = 2p-2$, $p \in \mathbb{N}^*$

Donc $\forall p \geq 1$ $U_{2p} - U_{2p-2}$

$$= \frac{-1}{2p-1} \left(\frac{4}{5} \right)^{2p-1}$$

$p=1$: $\cancel{U_2} - U_0 = \frac{-1}{2\times1-1} \left(\frac{4}{5} \right)^{2\times1-1}$

$p=2$: $\cancel{U_4} - \cancel{U_2} = \frac{-1}{2\times2-1} \left(\frac{4}{5} \right)^{2\times2-1}$

$p=3$: $\cancel{U_6} - \cancel{U_4} = \frac{-1}{2\times3-1} \left(\frac{4}{5} \right)^{2\times3-1}$

$\ldots \quad \cancel{\ldots} - \ldots = \ldots$

$\ldots \quad \ldots - \ldots = \ldots$

$\ldots \quad \cancel{\ldots} - \ldots = \ldots$

$p=2n$: $U_{2n} - \cancel{U_{2n-2}} = \frac{-1}{2n-1} \left(\frac{4}{5} \right)^{2n-1}$

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient:

Suite Exercice 3 Bac 2011 SN

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient :

$$u_{2n}-u_0=\sum_{p=1}^{n}\frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$$

or $u_0=\int_0^{\ln 3}(f(t))^0\,dt=[t]_0^{\ln 3}=\ln 3$

$$\boxed{\text{Donc } u_{2n}=\ln 3-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}}$$

Montrons de même que

$$u_{2n+1}=\ln\frac{5}{3}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}:$$

On applique la relation démontrée dans la question 2) c) :

$$\forall k\geq 2\quad u_k-u_{k-2}=\frac{-1}{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

pour les termes successifs d'indices impairs de la suite (u_n) ; termes d'indices $k=2p+1$ et $k-2=2p-1$, $p\in\mathbb{N}^*$

Donc $u_{2p+1}-u_{2p-1}=\frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$ $\forall p\geq 1$

Alors

$p=1$: $\cancel{u_3}-u_1=\frac{-1}{2\times 1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times 1}$

$p=2$: $\cancel{u_5}-\cancel{u_3}=\frac{-1}{2\times 2}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times 2}$

$p=3$: $\cancel{u_7}-\cancel{u_5}=\frac{-1}{2\times 3}\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times 3}$

$\dots\quad \cancel{\dots}-\dots=\dots$

$\dots\quad \dots-\dots=\dots$

$\dots\quad \cancel{\dots}-\dots=\dots$

$p=2n$: $u_{2n+1}-\cancel{u_{2n-1}}=\frac{-1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient

$$u_{2n+1}-u_1=\sum_{p=1}^{n}\frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$$

or $u_1=\ln\frac{5}{3}$

$$\boxed{\text{Donc } u_{2n+1}=\ln\frac{5}{3}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}}$$

Suite Exercice 3 Bac 2011 SN

b) pour tout entier naturel n strictement positif on pose

$$S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^4 + \dots + \frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$$

calcul de limite de la suite S_n

On a $S_n = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$$

or d'après la question

2) d) On a

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} = -U_{2n} + \ln 3$$

et

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} = -U_{2n+1} + \ln\frac{5}{3}$$

Alors

$$S_n = -U_{2n} + \ln 3 - U_{2n+1} + \ln 5 - \ln 3$$

et comme $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

$$\boxed{\text{alors } \lim_{n \to +\infty} S_n = \ln 5}$$