2015N

Ex 3 :

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (3-x)e^x$

1 : a) -

- $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} 3e^x - xe^x = 0 + 0 = 0$

$\boxed{y = 0}$ A · H pour (C) au voisinage de $(-\infty)$.

- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} (3-x)e^x = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{e^x}{x}(3-x) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$.

(C) admet une B · P de direction (oy).

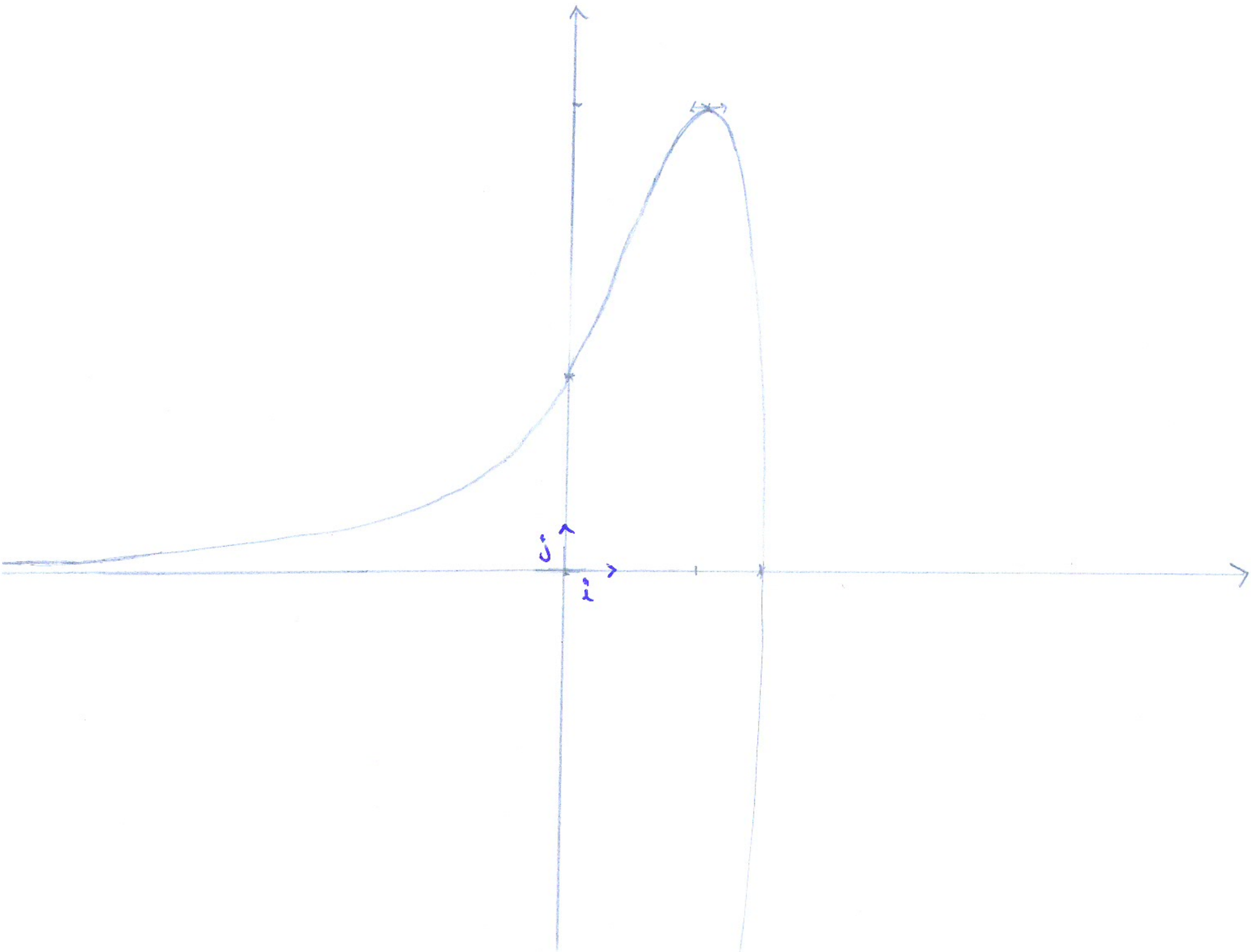
b) - $f'(x) = e^x(3-x) - e^x = e^x(2-x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$, le signe de f' est celui de $2-x$.

le T · V de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

1.c) -



.d) - $f'(x) - f(x) = (2-x)e^x - (3-x)e^x$

$= (2-x-3+x)e^x$

$= -e^x$ alors la solution de l'equation differentielle $f(x)$ tel que $f(x)$ est une solution particulier.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (f'(x)+e^x)\,dx = [f(x)+e^x]_0^3$$
$$= f(3)+e^3-f(0)-e^0$$
$$= 0+e^3-3-1$$
$$= e^3-4.$$

2) $n \geq 1$: $U_n = \frac{3^n}{n!}$

a) $n \geq 1$ $U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$, $U_n = \frac{3^n}{n!}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n} = \frac{3^n \times 3}{n!\,(n+1)} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}$$

$n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$

$0 \leq \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}}$

2.b) $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$

- $n = 3$: $0 \leq \frac{U_4}{U_3} \leq \frac{3}{4}$ $\times$
- $n = 4$: $0 \leq \frac{U_5}{U_4} \leq \frac{3}{4}$ $\times$

$\vdots$

$n-1$: $0 \leq \frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \frac{3}{4}$ $\times$

$$= \quad 0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1-3+1}$$

$$U_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{3\times3\times3}{3\times2\times1} = \frac{9}{2}$$

1.b) Soit ; $U_3 > 0 \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \times U_3$

$\boxed{0 \leq U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \cdot \frac{9}{2}}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = ?$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$; • $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$.

D'apres le T.G : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$

3)- $n \geq 1$: $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n \cdot e^x \, dx$

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots\dots + \frac{3^n}{n!}$

3.a)- $I_1 = \int_0^3 f(x) \, dx = e^3 - 4$

$\Rightarrow \boxed{I_1 = e^3 - 4}$

3.b)- $n \geq 1$; $0 \leq x \leq 3$

$0 \geq -x \geq -3$

$0 \leq 3 - x \leq 3$

$0 \leq \frac{(3-x)^n}{n!} \leq \frac{3^n}{n!}$

$0 \leq \frac{e^x (3-x)^n}{n!} \leq \frac{3^n}{n!}$

$0 \leq \frac{1}{n!}\int_0^3 e^x \frac{(3-x)^n}{1} \, dx \leq \frac{3^n}{n!} \left[e^x\right]_0^3$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq (e^3 - 1) \cdot \frac{3^n}{n!}$

c). $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^3 (3-x)^{n+1} \cdot e^x \, dx$

on pose :

$\begin{cases} U(x) = (3-x)^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = -(n+1)(3-x)^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = \left(\left[(3-x)^{n+1} \cdot e^x \right]_0^3 + \int_0^3 (n+1)(3-x)^n \cdot e^x \, dx \right) \frac{1}{(n+1)!}$

$= -\frac{1}{n+1} \cdot 3^{n+1} + \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx$

$= -U_{n+1} + I_n \Rightarrow \boxed{I_{n+1} = -U_{n+1} + I_n}$

uit 3. b) _

$\lim\limits_{n \to +\infty} o = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^3 - 1) \cdot \frac{3^n}{n!} = 0$

$\Rightarrow$ D'apres le T. G : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

3. d) _ $n \geq 1$

$e^3 \overset{?}{=} 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

$\boxed{e^3 \overset{?}{=} S_n + I_n}$ (1)

Par recurrance :

. pour $n = 1$: $S_1 + I_1 = 1 + 3 + e^3 - 4 = e^3$

alors la relation (1) est vrai pour $n = 1$

on suppose que c'est vrair pour n c'est-a-dire :

$e^3 = S_n + I_n$

et on demontre que c'est vrai pour $n+1$.

$$S_{n+1} + I_{n+1} = S_n + \frac{3^{n+1}}{n+1} + I_n - \frac{3^{n+1}}{n+1}$$

$$= S_n + I_n$$

$$= e^3$$

Donc : $\boxed{e^3 = S_n + I_n}$