

Ex 31

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (3-x)e^x$

1. a) -

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - xe^x = 0 + 0 = 0$

$y = 0$

A. H pour (C) au voisinage de  $(-\infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)e^x = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} (3-x) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

(C) admet une B.P de direction  $(0, 1)$ .

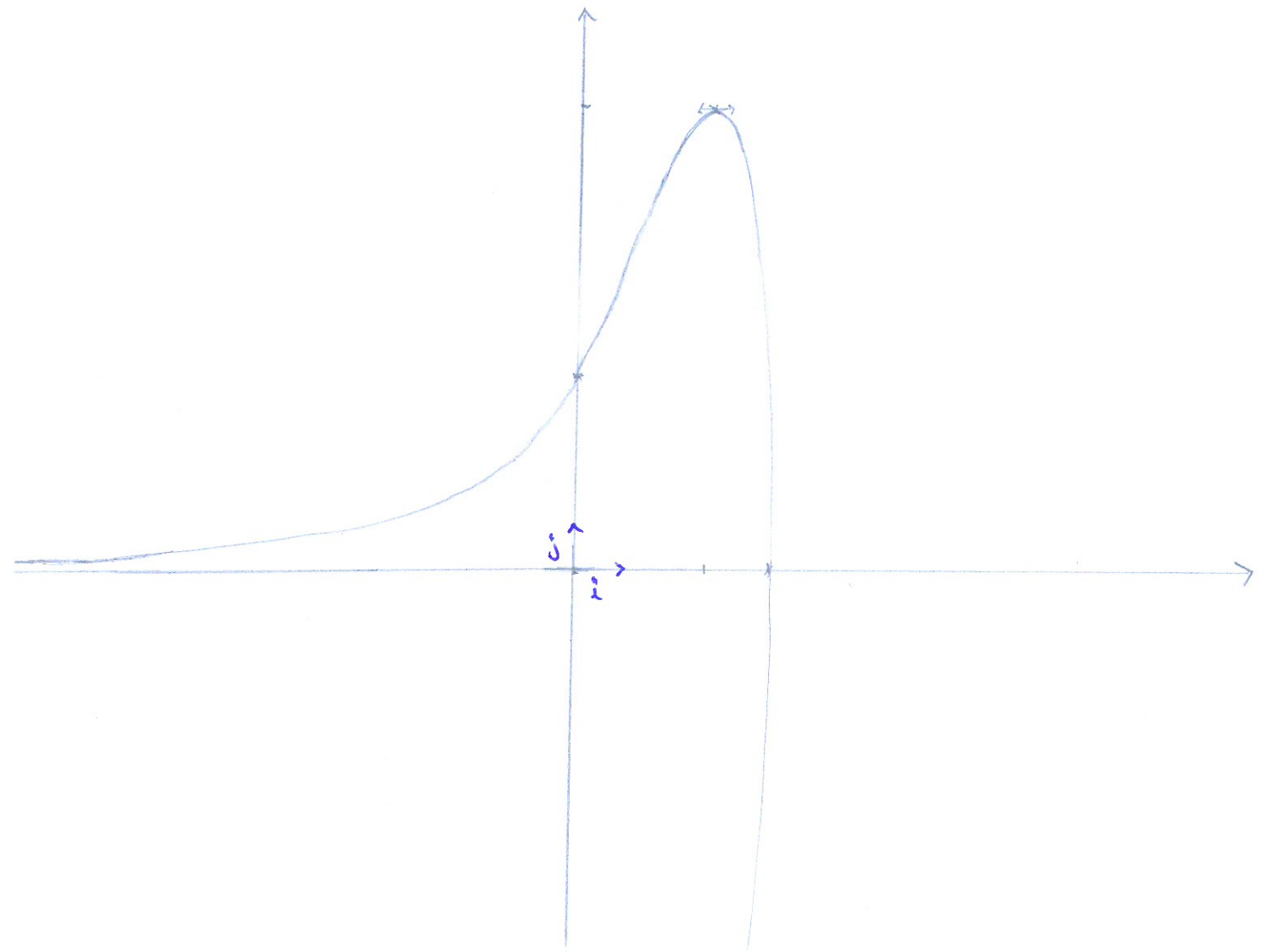
b) -  $f'(x) = e^x(3-x) - e^x = e^x(2-x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$ , le signe de  $f'$  est celui de  $2-x$ .

Le T.V de  $f$ :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$0$	$e^2$	$-\infty$

1. c) -



d) -  $f'(x) - f(x) = (2-x)e^x - (3-x)e^x$   
 $= (2-x-3+x)e^x$   
 $= -e^x$  alors la solution de  
l'équation différentielle  $f(x)$  tel que  $f(x)$  est une  
solution particulière.

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (f'(x) + e^x) dx = [f(x) + e^x]_0^3$$

$$= f(3) + e^3 - f(0) - e^0$$

$$= 0 + e^3 - 3 - 1$$

$$= e^3 - 4$$

21.  $n \geq 1$  :  $U_n = \frac{3^n}{n!}$

a).  $n \geq 2$  :  $U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$  ,  $U_n = \frac{3^n}{n!}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n} = \frac{3^n \times 3}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}$$

$n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$$

2. b1.

$$0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$$

$n = 3$  :  $0 \leq \frac{U_4}{U_3} \leq \frac{3}{4} \times$

$n = 4$  :  $0 \leq \frac{U_5}{U_4} \leq \frac{3}{4} \times$

$\vdots$

$\vdots$

$n-1$  :  $0 \leq \frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \frac{3}{4} \times$

---


$$= 0 \leq \frac{U_n}{U_3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1-3+1}$$

$$U_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \frac{9}{2}$$

1. b) - Suit :  $U_3 > 0 \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \times U_3$

$$0 \leq U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \cdot \frac{9}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$     •  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$

D'après le T.G :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

3) -  $n \geq 1$  :  $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-u)^n \cdot e^u \, du$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!}$$

3. a) -  $I_1 = \int_0^3 f(u) \, du = e^3 - 4$

$\Rightarrow I_1 = e^3 - 4$

3. b) -  $n \geq 1$  ;  $0 \leq u \leq 3$

$$0 \geq -u \geq -3$$

$$0 \leq 3-u \leq 3$$

$$0 \leq \frac{(3-u)^n}{n!} \leq \frac{3^n}{n!}$$

$$0 \leq \frac{e^u (3-u)^n}{3 n!} \leq \frac{3^n}{n!}$$

$$0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^3 \frac{e^u (3-u)^n}{1} \, du \leq \frac{3^n}{n!} [e^u]_0^3$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq (e^3 - 1) \cdot \frac{3^n}{n!}$$

$$c). \quad I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^3 (3-x)^{n+1} \cdot e^x dx$$

on pose :

$$\begin{cases} U(x) = (3-x)^{n+1} \\ V'(x) = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} U'(x) = -(n+1)(3-x)^n \\ V(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[ (3-x)^{n+1} \cdot e^x \right]_0^3 + \int_0^3 (n+1)(3-x)^n \cdot e^x dx \cdot \frac{1}{(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n+1} \cdot 3^{n+1} + \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x dx \end{aligned}$$

$$= -U_{n+1} + I_n \Rightarrow \boxed{I_{n+1} = -U_{n+1} + I_n}$$

uit 3. b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^3 - 1) \cdot \frac{3^n}{n!} = 0$$

⇒ D'après le T.G :  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$

3. d)  $n \geq 1$

$$e^3 \stackrel{?}{=} 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n$$

$$\boxed{e^3 \stackrel{?}{=} S_n + I_n} \quad (1)$$

Par récurrence :

pour  $n=1$  :  $S_1 + I_1 = 1 + 3 + e^3 - 4 = e^3$

alors la relation (1) est vraie pour  $n=1$

n suppose que c'est vrai pour  $n$  (c'est-à-dire :

$$e^3 = S_n + I_n$$

et on démontre que c'est vrai pour  $n+1$ .

$$\begin{aligned} S_{n+1} + I_{n+1} &= S_n + \frac{3^{n+1}}{n+1} + I_n - \frac{3^{n+1}}{n+1} \\ &= S_n + I_n \\ &= e^3 \end{aligned}$$

Done :

$$e^3 = S_n + I_n$$