Nom : Med yahya / Med lemine

BAC 2014 S.N

Nom : Sidi / Mohamed
Medyahya / Med lemine

Exercice 1 :

On pose : $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z + (-2i)$

1) * calculons $P(2i)$

$P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)2i - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$P(2i) = 0$

* Determinons $z_0 ; z_1$ et z_2 t.q $\mathrm{Im}\, z_0 \geq \mathrm{Im}\, z_1 \geq \mathrm{Im}\, z_2$

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	$\downarrow$	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C}$

$P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \iff$

$z - 2i = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Rightarrow z = 2i \; ; \; \Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$\Rightarrow \boxed{\delta = i\sqrt{3}}$

$z' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z'' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2i \; ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \; ; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}$

$\mathrm{Im}(2i) \geq \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \geq \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{2} - \ldots\right.$

$\Rightarrow \boxed{z_0 = 2i} \; ; \; \boxed{z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

$\boxed{z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

2) a) On a ; $B\left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; C\left(-\frac{1}{2} ; \ldots\right.$

et soit $M(x ; y)$

$M \in (BC) \iff \det(\vec{BM} ; \vec{BC}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x + \frac{1}{2} & 0 \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\iff -\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \iff x + \frac{1}{2} = 0$

$\iff \boxed{2x + 1 = 0}$

b) $M \in (BC) \setminus \{B ; C\}$

$\iff z = -\frac{1}{2} + iy \; / \; y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2} \ldots \right.$

et on a

$z' = \frac{1}{z^2 + z + 1} = \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

On remplace z par son expression

$z' = \frac{1}{\left(-\cancel{\frac{1}{2}} + iy + \cancel{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

$z' = \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$

3) a) On a $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$

on multiplie par $\bar{z}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2+\bar{z}z+\bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z+\bar{z}z+\bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{|z|^2 z+|z|^2+\bar{z}}$

si $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$

D'où

$$\boxed{f(z) = \frac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}}$$

b) $z = e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = e^{-i\theta}$

or $|z|$ reste 1

$\Rightarrow f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$

$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathcal{C}_{(O;1)} \setminus \{B;C\}$

$\Rightarrow z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ (2x-1)^2 = \left(\frac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta}-1\right)^2 = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = (2x-1)^2}\ \Gamma$

b) D.q Γ est un hyperbole

$x^2+y^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-y^2 = -1$

$3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}\right]-y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-y^2 = \frac{1}{3}$

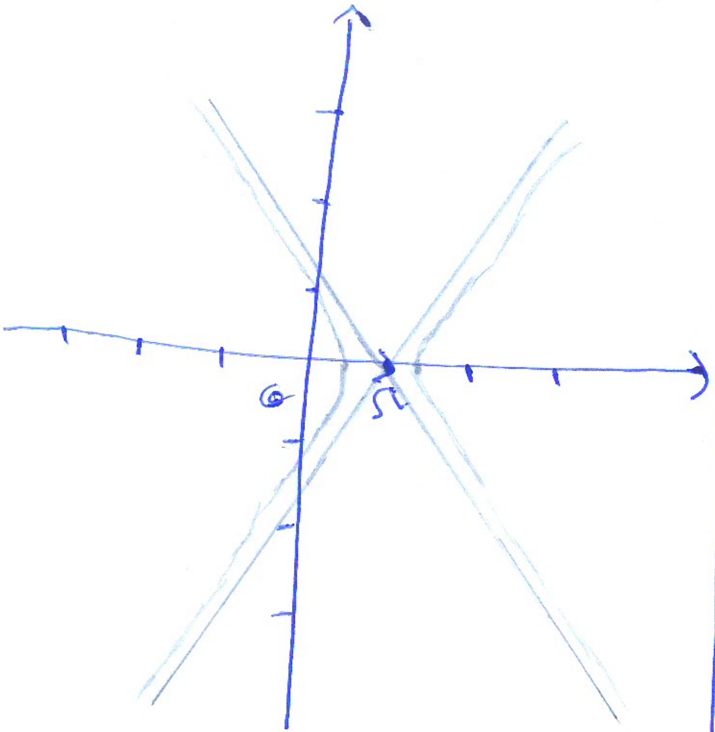
$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

$\Gamma : \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$

$\Rightarrow \Gamma$ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{\ }; 0\right)$ et des sommet : $S_1(1;0)$, $S_2\left(\frac{1}{\ }; 0\right)$

* Calculons l'excentricité

$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{2}{3} \times 3 = 2$



Exercice 2

$f(x) = xe^x$

1 - a) On a $D_f = \mathbb{R}$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} xe^x = +\infty$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \iff x+1 = 0 \iff \boxed{x = -1}$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $y = 0$ AH $//(+\infty)$

* $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} e^x = +\infty$

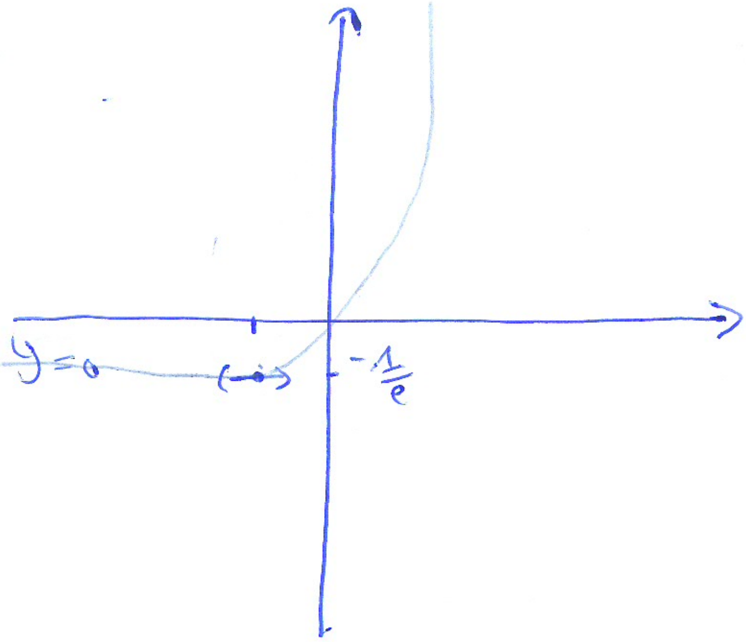
B.P $//(yy')$

au voisinage de $+\infty$

Exercice 2 (Suite)

b)

* $\mathcal{C}_n(y'y) : (0;1)$
* $\mathcal{C}_n(xx') : (0;0$



1) c) : $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x = 0$

$= (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc f est une Solution de l'équation différentielle

$y'' + 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (c) l'axe des abscisses et les droites

$x = 0$ est $A = \int_0^1 f(x)\,dx$

$A = \int_0^1 xe^x$

par Ipp

on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$= [(x-1)e^x]_0^1$

$\boxed{A = 1\ u.a}$

2) on pose $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

a) M.q : $I_1 = -1$

$I_1 = -\int_0^1 xe^x\,dx$

$I_1 = -A$

$\boxed{I_1 = -1}$

b) $|I_n| = |(-1)^n| \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

$= 1 \left|\int_0^1 x^n e^x\right|$

Sur $[0;1]$ $\int_0^1 x^n e^x \geq 0$

$\Rightarrow \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right| \geq 0 = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

Exercice 2 (Suite)

2) b)

$0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq e^{x} \leq e$

$\Longrightarrow x^n \leq x^n e^x \leq x^n e$

$\Longrightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \int_0^1 x^n dx$

$\Longrightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$

or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

d'ou d'aprés le T. G $\lim_{n \to +\infty} |I_n| = 0$

Donc : $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^{x} dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{x} \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^{n} \\ v(x) = e^{x} \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\left[x^{n+1} e^{x}\right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx \right)$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1} (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^{n}(n+1) \int_0^1 x^n e^x dx$

$$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n}$$

Exercice 3 :

1 - a) on'a : $f(0) = 0$ et

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim_{x \to 0^+} x\left(\ln(x+1) - \ln x\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(x\ln(x+1) - x\ln x\right)$

$= 0 - 0 = 0$ Donc : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où : f est continue à droite en 0

b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0 et La courbe $\mathcal{C}$ de f admet au pt d'abscisse, une demi-tangente verticale.

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{0}$ F. I

on Pose $t = \frac{1}{x}$ Alors $\lim_{x \to +\infty} t = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

et $x = \frac{1}{t}$; $\lim_{x \to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ Donc $y = 1$

Asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

2 - a) $\forall x > 0$; $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \forall x > 0$$

Donc f' est décroissante sur $]0;+\infty[$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$

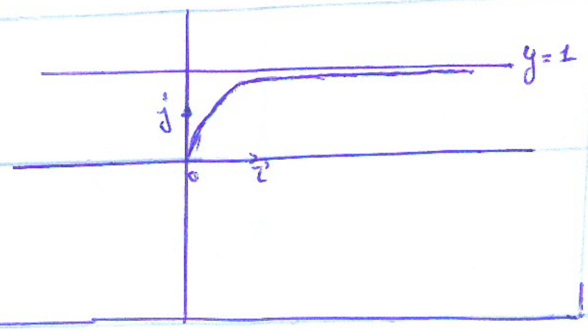
$= 0 - 0 = 0.$

D'où : $\forall x > 0 \; ; f'(x) > 0$

b) Tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

c)



3-a) pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue $[0;1]$

Montrons que f_n est continue sur $[0;1]$

• Sur $]0;1]$ $f_n(x) = x^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est le produit des deux fonctions $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ continues sur $]0;1]$ d'où f_n est continue sur $]0;1[$

- Etudions la continuité de f_n à droite en 0

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} x^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x^n \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} x^n(\ln(x+1) - \ln x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (x^n \ln(x+1) - x^n \ln x) = 0 - 0 = 0$$

D'où f_n est continue à droite en 0

Donc : f_n est continue sur $[0;1]$ et

L'intégrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$; existe et cette écriture definie bien une suite numerique.

b) d'après le T.V de f definie dans la question 1) on'a : $\forall\, x \geq 0 \quad 0 \leq f(x) \leq 1$

D'où : en multipliant par x^{n-1} on'a : $\forall x \in [0;1] \quad 0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$; or $\forall x \in [0;1]$; $f_n(x) = x^{n-1} f(x)$; D'où : $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\forall\, n \geq 1$; $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'ou d'après T. G $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 0$

4-a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\, dx$; on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$$I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1} \int_\alpha^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1 = 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln \alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln \alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$$

b) $$\lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln \alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1} (\alpha \ln \alpha) - \frac{1}{(n+1)^2} = 0 - 0 \times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}\right.$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \frac{-1}{(n+1)^2}$$

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\, dx$; on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1) x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on obtient $v(x)$ en utilisant une Integration Par Parties

$$J_{n+1} = \left[x^{n+1}((x+1)\ln(x+1) - x\right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n ((x+1)\ln(x+1) - x)\, dx$$

$$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1) \int_0^1 (x^{n+1} + x^n) \ln(x+1)\, dx + (n+1) \int_0^1 x^{n+1}\, dx$$

$$= 2\ln 2 - (n+1) \int_0^1 (x^{n+1} + x^n) \ln(x+1)\, dx + (n+1) \int_0^1 x^{n+1}\, dx$$

$$= 2\ln 2 - (n+1) \int_0^1 x^{n+1} \ln x\, dx + \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, dx + (n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$$

$$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1} + J_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$$; Donc :

$$J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1) J_{n+1} - (n+1) J_n - \frac{1}{n+2} \Rightarrow J_{n+1} + (n+1) J_n = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1) J_n$$

$$(n+2) J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1) J_n$$

$$J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} J_n$$