BAC 2014 SN : ERRAJA 2 :

Les élèves : Aminetou Mohamed Yeslem
Khadjetou Mohamed Mahmoud.

Exercice 1 :

$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$

1/ $P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)2i - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i + 4 - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 4$

$\boxed{P(2i) = 0}$

	1	1-2i	1-2i	-2i
2i	↓	2i	2i	2i
	1	1	1	0

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z'' = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{ 2i \,;\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \,;\, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$

$Im(2i) > Im\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) > Im\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_0 = 2i$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a). On a : $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

soit $M(x, y)$.

$M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + iy \,/\, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

or : $z' = \frac{1}{z^2 + z + 1} = \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

D'où : $z' = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + iy + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{-y^2 + \frac{3}{4}} \in \mathbb{R}$.

Donc M' est sur l'axe des abscisses.

3. a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc : si $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$.

d'où : $f(z) = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

b) si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = $

Donc : $f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

4) a). $M \in \mathcal{C}_{(0,1)} \setminus \{B, C\} \Rightarrow$

$z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta$

$\Rightarrow z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (x' - 1)^2 = \left(\frac{2\cos\theta}{} - 1\right)^2 = \frac{1}{} \end{cases}$

Exercice 1 : (suite)

4)a) $\Gamma : x'^2 + y'^2 = (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9}\right] - y^2 = -1$

$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{1/9} - \dfrac{y^2}{1/3} = 1$

4)b) $\dfrac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$

$\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc : Γ est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ et de sommets $S_1 : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}, 0\right) = (1, 0)$ et $S_2 : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité

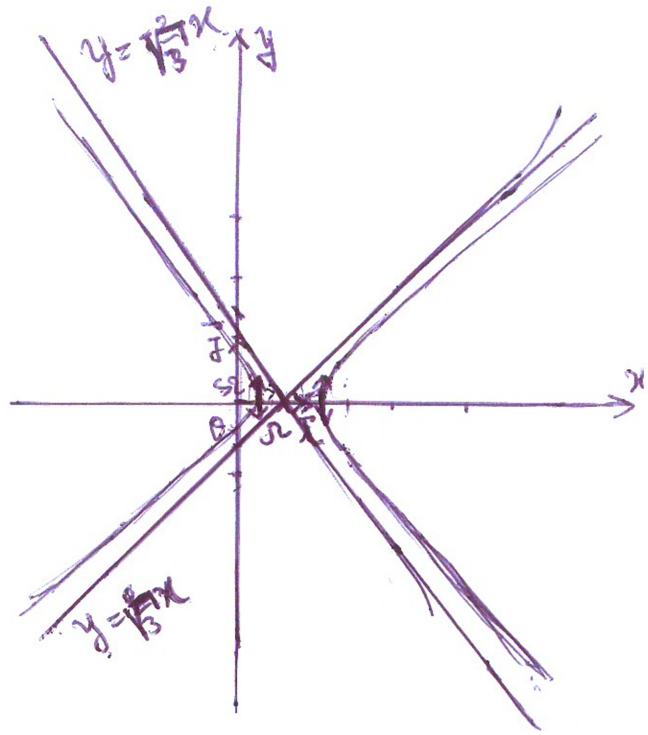
$e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \dfrac{2/3}{1/3} = 2.$

Les asymbtotes :

$\Delta : y = \frac{b}{a}x = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}x}{1/3} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}\,x}$

$\Delta' : y = -\frac{b}{a}x = -\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1/3}x$

$\boxed{y = -\sqrt{3}\,x}$



Suite bac 2014 S.N

Exercice 2 :

1) a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

f est continue et derivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

. $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

- le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $y = 0$: A.H au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{xe^x}{x} = +\infty$

C) admet une B.P // $(y'y)$ au voisinage de $+\infty$.

$C \cap (y'y) : (0,0)$

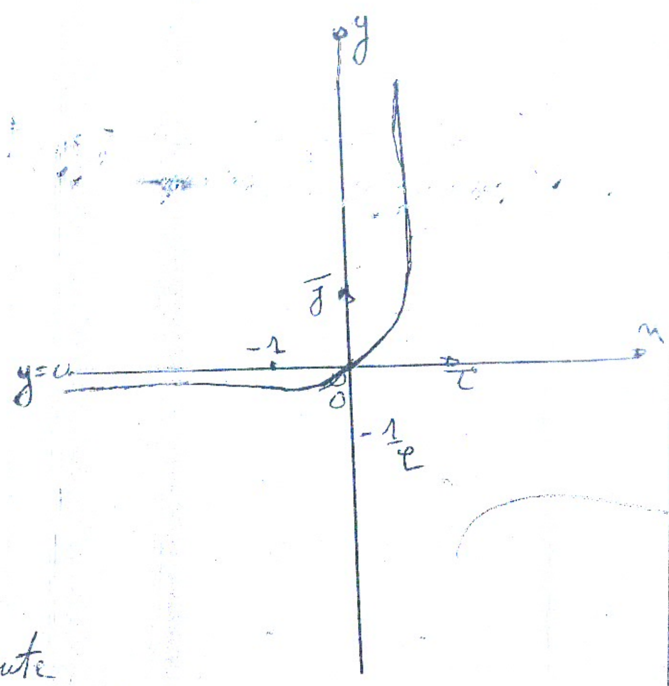
$C \cap (x'x) : (0,0)$

c) - $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$



Suite

1)-C)-

$= (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x$

$= (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc : f est une solution de l'équation differentielle

$y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'equation $x=0$ et $x=1$ et :

$A = \int_0^1 |f(x)| \, dx$

or : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

Donc $A = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 xe^x \, dx$

on pose : $\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = e^x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = e^x \end{cases}$

$A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$

$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = [(x-1)e^x]_0^1$

$\boxed{A = 1 \text{ u.a}}$

a) $I_1 = (-1)\int_0^1 xe^x\,dx$

or : $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$

D'où $\boxed{I_1 = -1}$

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

Donc : $|I_n| = |(-1)^n| \cdot \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

or : $\forall x \in [0,1]$, $x^n e^x \geq 0$

D'où $\int_0^1 x^n e^x\,dx \geq 0$

Donc : $\left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

D'où $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e \cdot x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leq e \cdot \int_0^1 x^n\,dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\forall n \geq 1 : \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$

or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1}$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x\,dx$

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1}\left(\left[x^{n+1}e^x\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(e - 0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx\right)$

$= (-1)^{n+1} \times e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$;

$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n, \ \forall n \geq 1$

3) suite

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3 + 4x^2 - 3x - 6)e^x}{x+1}\,dx$

	1	4	-3	-6
-1		-1	-3	6
	1	3	-6	6

$J = \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x - 6)\cancel{(x+1)}e^x}{\cancel{(x+1)}}$

$= \int_0^1 x^2 e^x\,dx + 3\int_0^1 xe^x\,dx - 6\int_0^1 e^x\,dx$

$= (-1)^2 \int_0^1 x^2 e^x\,dx + 3 \times (-1)\int_0^1 x e^x\,dx$

$= -6\left[e^x\right]_0^1$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

or : $I_1 = -1$ et $I_2 = (-1)^2 e + 2I_1 = e - 2$

D'où $J = (e-2) - 3 \times (-1) - 6(e-1)$

$= e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\boxed{J = 7 - 5e}$

Exercice : 3

1) a) on a $f(0) = 0$ et

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$= \lim x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim x\left(\ln(x+1) - \ln x\right)$

$\lim \left(x \ln(x+1) - x \ln x\right)$

$= 0 - 0 = 0$

$= f(0)$

$= 0$

Donc f et continue à droite en 0

Suite Exo : 3

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{x\ln(1+\frac{1}{x})-0}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{x} = \lim \ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$

f n'est donc pas dérivable à droite de 0, et la courbe $\mathcal{C}$ de f admet au point d'abscisse, une demi-tangente verticale.

c) - $\lim f(x) = \lim x \overset{+\infty}{} \overset{0}{\ln(1+\frac{1}{x})}$ F.I

on pose $t = \frac{1}{x}$

Alors $\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et

$\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

Donc : $y = 1$ A.H. à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$

2) a) $\forall x>0$, $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$

* $f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$= \ln(1+\frac{1}{x}) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$= \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$

$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-\cancel{x}-1+\cancel{x}}{x(x+1)^2}$

$$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$f''(x) < 0$, $\forall x>0$

Donc f' est $\searrow$ sur $]0,+\infty[$.

or : $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right)$

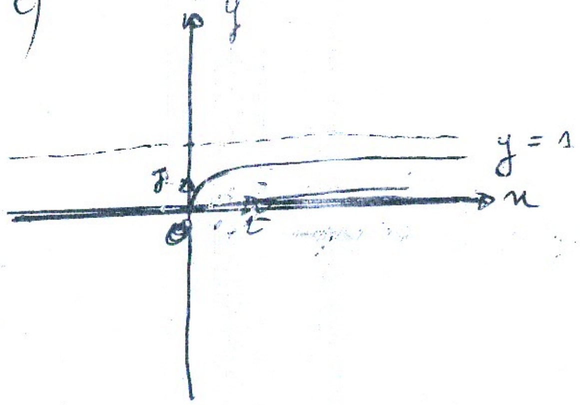
$= 0 - 0 = 0$

D'où $\boxed{\forall x>0 \quad f'(x) > 0}$

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$ 1

c)



3) a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$

Montrons que f_n est continue sur $[0,1]$

- sur $]0,1]$, $f_n(x) = x^n\ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonctions $x \to x^n$ et $x \to \ln(1+\frac{1}{x})$ continue sur $]0,1]$ d'où

f_n est continue sur $]0,1]$

Etudions la continuité de f_n à droite en 0.

$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} x^n \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x \to 0^+} x^n \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} (x^n \ln(x+1) - x^n \ln x)$

$= 0$

$= f_n(0)$.

D'où f_n est continue à droite en 0.

sur l'intervalle $[0,1]$ et l'intégrale

$A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

ensuite cette écriture définie bien une suite numérique.

b) D'après le T.V de la fonction f définie dans la question 1) on a:

$\forall x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq 1$

D'où, en multipliant par x^{n-1} on a:

$\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

or: $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc: $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

D'où: $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_1^0$

Donc:

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}}$$

or: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où d'après le T. G $\boxed{\lim_{n \to +\infty} A_n}$

4) a) $I_n(\alpha) = \int_0 x^n \ln x\,dx$

on pose $\begin{cases} U(x) = \ln x \\ V'(x) = x^n \end{cases}$

Alors $\begin{cases} U'(x) = \frac{1}{x} \\ V(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$\therefore I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\int_\alpha x^n\,dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= 0 \quad \frac{1}{(n+1)\alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha + \frac{\alpha^{n}}{(n+}$

$$\boxed{\therefore I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^\alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha - \frac{1}{(n+1)}}$$

b) $\lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = \lim\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \ln\alpha - \frac{}{(n}\right.$

$= \lim_{\alpha \to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1}(\alpha \ln\alpha) - \frac{1}{(n+1)}\right.$

$= 0 - 0 \times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\boxed{\therefore \lim_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}}$$

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx$

on pose $\begin{cases} U(x) = x^{n+1} \\ V'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

Alors $\begin{cases} U'(x) = (n+1) x^n \\ V(x) = (n+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

on obtient $V(x)$ en utilisant une I.P.P

Suite Exercice 3 : Bac 2014 S.N

4) c) - Suite

$\therefore J_{n+1} = \left[x^{n+1}((n+1)\ln(n+1)-n)\right]_0^1$

$-(n+1)\int_0^1 x^n((x+1)\ln(x+1)-x)\,dx$

$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1}+x^n)\ln(x+1)\,dx$

$+(n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 x^{n+1}\ln x\,dx + \int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx$

$(n+1)\left(\frac{1}{n+2}-0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1}+J_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$

$\therefore J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)J_{n+1} - (n+1)J_n - \frac{1}{n+2}$

$\therefore (n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

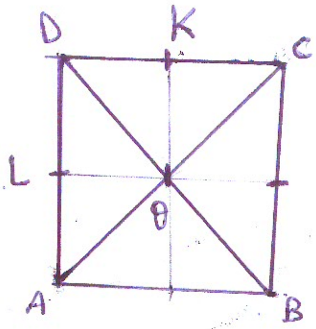
$$\boxed{\therefore J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}J_n}$$

Fin

Exercice 4 :

Partie A

1)



2) Comme $BL^2 = BA^2 + AL^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

et $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

$\Rightarrow$ Donc $BL = AK \neq 0$ et $\vec{AB} \neq \vec{KL}$

Donc : il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L.

Et comme méd $[AB] = (OK)$ et méd $[KL] = (BD)$.

et $(OK) \cap (BD) = \{O\}$

Le centre de r est donc le point O.

Un angle de r est $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

3-a) Comme $D \neq B$ et $L \neq O$, il existe donc une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O.

Le rapport de f_1 est $\frac{OL}{BD} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Et un angle de f_1 est : $(\vec{BD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

b) Comme $f_1(P) = P$ et $f_1(B) = O$

On a donc : $(\vec{PB}, \vec{PO}) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Or : $(\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

D'où : $(\vec{PB}, \vec{PO}) = (\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}$ $(\neq 0[\pi])$

Donc : le point P appartient au cercle circonscrit au triangle OAB c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre $[AB]$

De même : comme $f_1(P) = P$ et $f_1(D) = L$,

on a : $(\vec{PD}, \vec{PL}) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Or : $(\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

D'où : $(\vec{PD}, \vec{PL}) = (\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}$ $(\neq 0[\pi])$

Donc : le point P appartient au cercle circonscrit au triangle ODL c'est-à-dire que P appartient au cercle de diamètre $[OD]$.

On constate que le point O est commun au cercle de diamètre $[OD]$.

On constate que le point O est commun aux cercles de diamètre $[OD]$.

On constate que le point O est commun aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[OD]$ mais qu'il n'est pas le centre de f_1 (car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$)

le point P est donc le second point commun à ces deux cercles (autre que O).

Exercice 4 : (suite)

3/ b/ Montrons que P est le point d'intersection de (BL) et (AK)

$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PO}) + (\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PL})$

$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DL})\ [\pi]$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

Donc : $\boxed{P \in (BL)}$

De même :

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PK}) = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PO}) + (\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PK})$

$= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DK})\ [\pi]$

$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

Donc : $\boxed{P \in (AK)}$

P est donc le point d'intersection de (BL) et (AK).

4/ a/ Comme $f_2(B) = D$ et $f_2(O) = L$

un angle de f_2 est :

$(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DL}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DL})$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

Et le rapport de f_2 est :

$\frac{DL}{BO} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b/ $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont deux similitudes directes de même rapport et de même angle et transforment le point B en un même point L (car $f_2 \circ f_1(B)$

$= f_2(f_1(B)) = f_2(O) = L$ et

$f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$.

Donc : $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$

Le centre de f_2 est donc celui de f_1 : c'est-à-dire le point P

5/ a/ $h = f_1 \circ f_2$ est la composée de deux similitude directe dont le produit des rapports est $\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\ (\neq 1)$ et dont la somme des angles est $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi\ [2\pi]$ et ayant même centre P d'où h est une homothétie de centre P et de rapport $-\frac{1}{4}$.

or : $h(P) = f_1 \circ f_2(B) = f_1(f_2(B))$

$= f_1(D) = L$.

d'où : $\overrightarrow{PL} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$

Donc : $P = \text{bar}\begin{bmatrix} B & L \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b/ $P = \text{bar}\begin{bmatrix} B & L \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

$\Leftrightarrow P = \text{bar}\begin{bmatrix} B & D & A \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Or : $B = \text{bar}\begin{bmatrix} A & C & D \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

D'où : $P = \text{bar}\begin{bmatrix} A & C & D & D & A \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow P = \text{bar}\begin{bmatrix} A & C & D \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow P = \text{bar}\begin{bmatrix} A & K \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 4 (suite).

Partie B :

1) $r = S_1 \circ S_2$ est la composée de deux reflexion de plan perpendiculaires suivant (AD) d'où r est un demi-tour d'axe (AD).

2) $t = S_3 \circ S_4$ est le composeé de deux reflexions de plan parallèles, donc t est une translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{DA}$.

3). $f = S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 = r \circ t$ est la composeé d'une rotation d'axe (AD) et d'une translation de vecteur directeur de l'axe.

Donc : f est un vissage d'axe (AD), d'angle π et de vecteur $\vec{u} = 2\vec{DA}$.