Nom : Mohamed Mahmoud o/Mohamed Abdellahi (1)
Classe : 7C
N° : 1321
Ecole : Erraja.

Page : 1

Correction du Bac 2014 (S. Normale)

Exercice 1 : (Nombre Complexe)

1) Calcule de $P(2i)$:

$P(2i) = (2i)^3 + (1-2i)(2i)^2 + (1-2i)(2i) - 2i$

$= -8i - 4(1-2i) + 2i(1-2i) - 2i$

$= -8i - 4 + 8i + 2i + 4 - 2i = 0$

$P(2i) = 0$

Tableau D'Honneur

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$		$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

* $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2+z+1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\}$

$Im(2i) \geq Im(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) \geq Im(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})$

$z_0 = 2i$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2) a) on a : $B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Soit $M(x, y)$

$M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\vec{BM}, \vec{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & 0 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}(x+\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$2x + 1 = 0$

b) $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + iy \,/\, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

Or : $z' = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

D'où $z' = \frac{1}{(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{(iy)^2 + \frac{3}{4}}$

Donc M' est sur l'axe des abscisses.

3) a) $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z^2 + \bar{z}z + \bar{z}}$

$= \frac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z + \bar{z}z + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2 \times z + |z|^2 + \bar{z}}$

Donc si $|z| = 1$ alors $|z|^2 = 1$

d'où $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + 1 + \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$

b) si $z = e^{i\theta}$ alors $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $|z| = 1$

Donc : $f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

4) a) $M \in \mathcal{C}(O, 1) \setminus \{B, C\} \Rightarrow z = e^{i\theta}$ et $\cos\theta \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y' = \frac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2} = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ (2x'-1)^2 = (\frac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta} - 1)^2 = \frac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \end{cases}$

D'où : $x'^2 + y'^2 = (2x'-1)^2$

Nom: Mohamed Mahmoudo / Mohamed Abdellahi

Classe: 7C

N°: 1321

École: Erraja.

Page: 2

Correction du Bac 2014

(C). Session. Normale

Exercice ①: ((Nombre Complexe))

(suite):

1) b) $\Gamma: x^2+y^2=(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x-y^2=-1$

$\Leftrightarrow 3(x^2-\frac{4}{3}x)-y^2=-1$

$\Leftrightarrow 3\left[(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9})-\frac{4}{9}\right]-y^2=-1$

$\Rightarrow 3(x-2/3)^2-y^2=\frac{1}{3}$

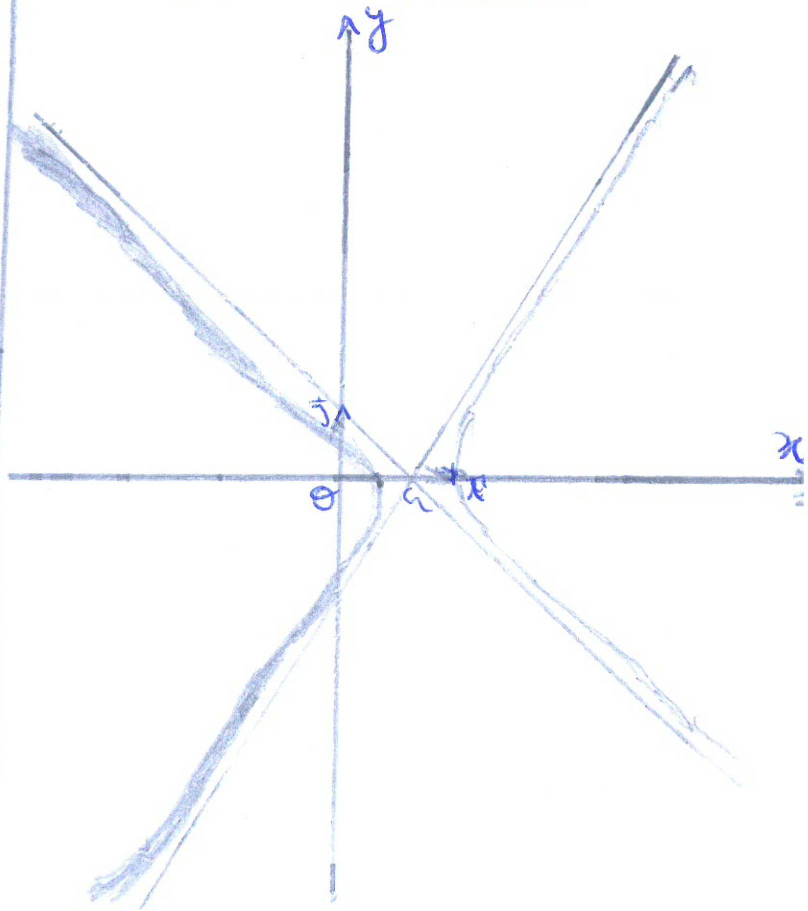
$\Leftrightarrow \frac{(x-2/3)^2}{1/9}-\frac{y^2}{1/3}=1$

$\Gamma: \frac{(x-2/3)^2}{(1/3)^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{3}/3)^2}=1$

$\Gamma: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a=1/3$ et $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega(2/3, 0)$ et de sommets $S_1: (\frac{2}{3}+\frac{1}{3}, 0)=(\frac{1}{3}, 0)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité

$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{2/3}{1/3}=2$



Nom: Mohamed Mahmoud o/Mohamed Abdellahi (3)
Classe: 7C
N°: 1321
Ecole: Erraja

Page: 3

Correction du Bac 2014 (S.N)(

Exercice 2

1) a) $f(x) = xe^{x}$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = +\infty$

$f'(x) = e^{x} + xe^{x} = (x+1)e^{x}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$

$f'(x) = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

T.V

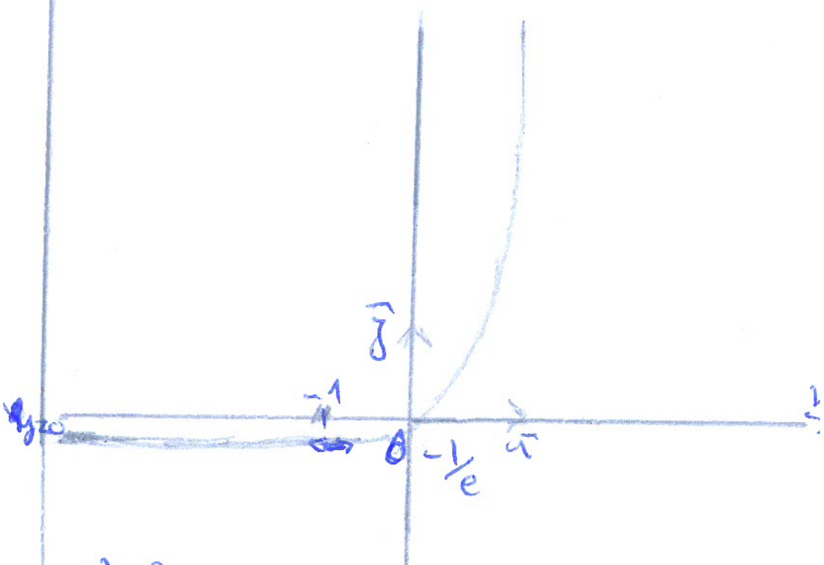
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) * $y=0$: A.H à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

(C) admet une B.P // $(y'y)$ au voisinage de $+\infty$

* $\mathcal{C} \cap (y'y)$: $(0,0)$
* $\mathcal{C} \cap (x'x)$: $(0,0)$



c) $f(x) = xe^{x}$

$f'(x) = (x+1)e^{x}$

$f''(x) = (x+2)e^{x}$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^{x} - 2(x+1)e^{x} + xe^{x}$

$= (x+2-2x-2+x)e^{x} = 0$

Donc: f est une solution de l'équation differentielle

$y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du Domaine plan limité par (C), l'axe des abscisse et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est

$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

Or: $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

Nom: Mohamed Mahmoud o/Mohamed Abdellahi (4)
Classe: 7C
N°: 1321
Ecole: Erraja

Page: 4

Correction du Bac 2014 (C) (S.N):

Exercice: 2 (Fonction) (suite)

1) d) L'aire:

$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^x dx$

on pose: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$A = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$

$= [(x-1)e^x]_0^1$

$\boxed{A = 1\, u.a}$

2) a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 xe^x dx$

Or: $\int_0^1 xe^x dx = 1$

Donc $\boxed{I_1 = -1}$

b) $I_n = (-1)^n \cdot \int_0^1 x^n e^x dx$

Donc: $|I_n| = |(-1)^n| \cdot |x^n e^x dx|$

$= 1 \times |x^n e^x dx|$

Or: $\forall x \in [0,1]$, $x^n e^x \geq 0$

D'où $\int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$

Donc: $|x^n e^x dx| = \int_0^1 x^n e^x dx$

D'où: $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e \cdot x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e \cdot \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\forall n \geq 1$, $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}}$

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'où D'après le T.G: $\lim\limits_{n \to +\infty} |I_n| = 0$

$\boxed{\text{Donc: } \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$I_{n+1} = (-1)^{n+1}\left([x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(e - 0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\right)$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^n (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$\boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n \quad \forall n \geq 1}$

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1} dx$

Nom: Mohamed Mahmoud o/ Mohamed Abdellahi (5)

Classe: 7C

N°: 1321

Ecole: Erraja

Page (5)

Correction du Bac 2014 (C) (S.N)

Exercice : 2 (Fonction) (Suite):

2) d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1}dx$

	1	4	-3	-6
-1		-1	3	6
	1	3	-6	0

$J = \int_0^1 \frac{(x^2+3x-6)(x+1)e^x}{(x+1)}dx$

$J = \int_0^1 (x^2+3x-6)e^x dx$

$= \int_0^1 x^2e^x dx + 3\int_0^1 xe^x dx - 6\int_0^1 e^x dx$

$= (-1)^2\int_0^1 x^2e^x dx - 3\times(-1)\int_0^1 xe^x dx$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

or : $I_1 = -1$ et

$I_2 = (-1)^2 e + 2I_1 = e-2$

D'où : $J = (e-2) - 3\times(-1) - 6(e-1)$

$= e-2+3-6e+6$

$\boxed{J = 7-5e}$

Exercice : (3) (Fonction):

1) a) on a : $f(0)=0$ et

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(1+\frac{1}{x})$

$= \lim_{x\to 0^+} x\ln(\frac{x+1}{x})$

$= \lim_{x\to 0^+} x(\ln(x+1)-\ln x)$

$= 0-0=0$

$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x\to 0^+} f(x)=0}$

D'où : f est continue à droite de 0

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$

f n'est pas donc derivable à droite en 0 et la courbe Cf de f admet au pt d'abscisse, une demi-tangente verticale.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = F.I$

On pose $t = 1/x$ alors :

$\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $x = \frac{1}{t}$

$\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\therefore \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=1}$ $y=1$. A . H

à Cf au voisinage $+\infty$

Nom : Mohamed Mahmoud o/ Mohamed Abdellahi (6)
Classe : 7C
No : 1321
Ecole : Erraja

Page : 6

Correction du Bac : 2014 (S.N)(C)

Exercice 3 (fonction) (suite) :

2) a) $\forall x>0,\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$$

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \forall x>0$

Donc f' est $\searrow$ sur $]0,+\infty[$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$

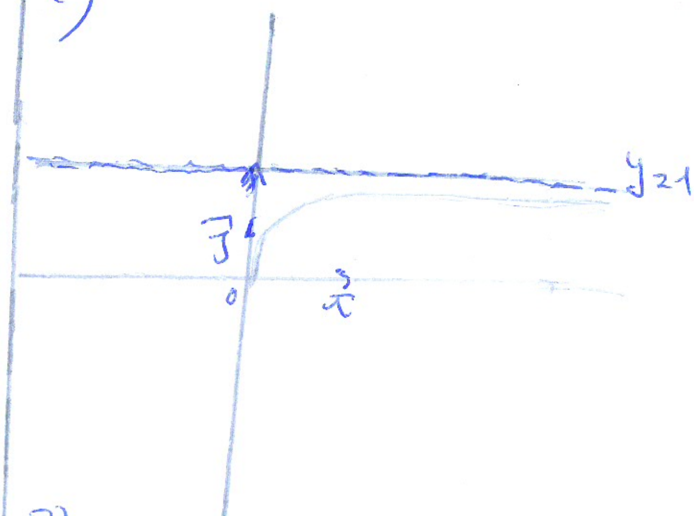
$= 0 - 0 = 0$

$\boxed{\text{D'où } \forall x>0,\ f'(x)>0}$

b) T.V de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

c)



3) a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$

Montrons que f_n est continue sur $[0,1]$

• Sur $]0,1]$, $f_n(x) = x^n\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est le produit de deux fonctions $x\mapsto x^n$ et $x\mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ continue sur $]0,1]$ d'où f_n est continue sur $]0,1]$

Nom : Mohamed Mahmoud o/ Mohamed Abdellahi
classe : 7C
N° : 1321
École : Erraja

Page 7

Correction du Bac : 2014 (SN)

Ex 3 (fonction) (Suite) :

3) a)

• Etudions la continuité de f_n à droite de zero

$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} x^n \ln(1+\frac{1}{x})$

$= \lim_{x \to 0^+} x^n \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$

$\lim_{x \to 0^+} x^n (\ln(x+1) - \ln x)$

$= \lim_{x \to 0^+} (x^n \ln(x+1) - x^n \ln x)$

$= 0 - 0 = 0$

$= f_n(0)$

D'où f_n est continue de 0^+

Donc f_n est continue sur $[0,1]$ et l'intégrale $A_n \int_0^1 f_n(x)dx$ existe de cette écriture definit bien une suite numerique.

b) D'après le T.V de la fonction defini dans la question 1) on a :

$\forall x \geq 0,\ 0 \leq f(x) \leq 1$

D'où : en multipliant par x^{n-1} on a : $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

or : $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)dx \leq x^{n-1}dx$

D'où $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\forall n \geq 1 : 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$

or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où d'après le T.G $\lim_{n \to +\infty} A_n = 0$

4) a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x\, dx$

on pose : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

alors : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

Nom: Mohamed Mahmoud ol Mohamed Abdellahi (8)

classe: 7C

N°: 1321

Ecole: Erraja

Page: 8

Correction du Bac: Sol 4(c) (S.N)

Exercice: 3 (Fonction)

(Suite):

4) a).

$In(\alpha) : \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\int_\alpha^1 x^n dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$

$In(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) $\lim_{\alpha \to 0^+} In(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{\alpha \to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1}(\alpha\ln\alpha) - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 0 - 0\times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\lim_{\alpha \to 0^+} In(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}$

c) $Jn+1 = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx$

On pose:

$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

On obtient $J(n)$ en utilisant une I.P.P

$Jn+1 = \left[x^{n+1}((x+1)\ln(x+1) - x)\right]_0^1$

$-(n+1)\int_0^1 x^n((x+1)\ln(x+1) - x)dx$

$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1} + x^n)\ln(x+1)dx$

$+ (n+1)\int_0^1 x^{n+1}dx.$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1}\ln(x+1) + x^n\ln(x+1))dx$

$+ (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}\ln x dx + \int_0^1 x^n\ln(x+1)dx\right)$

$(n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)(Jn+1 + Jn)$

$+ \left(\frac{n+1}{n+2}\right) - 1$

$Jn+1 = 2\ln 2 - (n+1)Jn+1 - (n+1)Jn - \frac{1}{n+2}$

$= (n+2)Jn+1 = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)Jn$

$Jn+1 = \frac{2\ln 2}{2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}Jn$