# Correction BAC 2016
## Session normal

Élaboré par : Mohamedvall Ahmedou Sidi Ahmed
Classe : 7C3
Établissement : Raja 1 Carreffour - NKH

## Exercice : 1

1) (E) : $5x - 3y = 17$ ou $(x, y) \in \mathbb{N}$

a) $5 \wedge 3 = 1$ et $1 \mid 17$

(E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$

$5\times4 - 3\times1 = 20 - 3 = 17$

Donc $(4 ; 1)$ est une solution particulière de (E)

b) soit $(x ; y)$ une solution quelconque de (E)

alors : $5x - 3y = 5\times4 - 3\times1$

$\Leftrightarrow 5(x-4) = 3(y-1)$ ⊛

D'après ⊛ $5 \mid 3(y-1)$ ; mais $5 \wedge 3 = 1$ donc Gauss permet de dire que : $5 \mid (y-1) \Leftrightarrow$

$\exists k \in \mathbb{Z} : y - 1 = 5k$, en remplaçant dans ⊛ :

$5(x-4) = 3\times5k \Leftrightarrow x - 4 = 3k \Leftrightarrow x = 4 + 3k$

et $y = 1 + 5k$ D'où : $S = \{(4+3k) ; (1+5k)\}\ k \in \mathbb{Z}$

2) $(x ; y)$ est une solution de (E)

a) si $x \mid y \Rightarrow \exists y' \in \mathbb{Z} \mid xy' = y$ et (E) devient :

$5x - 3xy' = 17 \Rightarrow x(5 - 3y') = 17$

$\Rightarrow x \mid 17$

b) $m \in \mathbb{Z}$ $\dfrac{1+5m}{4+3m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \mid y \Rightarrow x \mid 17 \Leftrightarrow$

$x \in \{-17 ; -1 ; 1 ; 17\}$. $x = -17 \Rightarrow 4 + 3m = -17$

$\Rightarrow m = -7$ : $\dfrac{1+5(-7)}{4+3(-7)} = 2$ (verifiée)

$x = -1 \Rightarrow 4 + 3m = -1 \Rightarrow 3m = -5$ (impossible)

$x = 1 \Rightarrow 4 + 3m = 1 \Rightarrow m = -1 \rightarrow \dfrac{1+5(-1)}{4+3(-1)} = -4$ (verifiée)

$x = 17 \Rightarrow 4 + 3m = 17 \Rightarrow 3m = 13$ (impossible)

D'où : Le valeurs de $m \mid \dfrac{1+5m}{4+3m} \in \mathbb{N}$

sont : $m = -7$ et $m = -1$

## Exercice : 2

1) $P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-14+24i)z + 32 + 4i$

a) $P(2i) = -8i + 16 + 32i - 28i - 48 + 32 + 4i = 0$

$P(2i) = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-4-8i$ | $-14+24i$ | $32+4i$ |
| $2i$ | | $2i$ | $12-8i$ | $-32-4i$ |
| | 1 | $-4-6i$ | $-2+16i$ | 0 |

b) $P(z) = (z-2i)(z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i)$

$P(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 2i \\ \text{ou} \\ z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i = 0 \end{cases}$

$\Delta = (4+6i)^2 - 4(-2+16i) = -12 - 16i$

$\delta = (2-4i)^2$

$z_1 = \dfrac{4+6i+2-4i}{2} = 3+i$

$z_2 = \dfrac{4+6i-2+4i}{2} = 1+5i$

D'où : $S = \{2i ; 3+i ; 1+5i\}$

c) $z_A = 2i$ ; $z_B = 3+i$ ; $z_C = 1+5i$

$G = \text{bar}\{(O ; 5) ; (A ; -7), (C ; 4)\}$

$z_G = \dfrac{5z_O - 7z_A + 4z_C}{2} = \dfrac{0 - 14i + 4 + 20i}{2} = 2 + 3i$

2) $\varphi(z) = z^2 - (4+6i)z - 2 + 16i$

a) $z = x + iy \Rightarrow \varphi(z) = (x+iy)^2 - (4+6i)(x+iy) - 2 + 16i$

$\varphi(z) = x^2 + 2ixy - y^2 - 4x - 4iy - 6ix + 6y - 2 + 16i$

$\varphi(z) = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 + i(2xy - 4y - 6x + 16)$

$M(x ; y) \in \Gamma \Leftrightarrow \text{Re}(\varphi(z)) = 0$

D'où l'équation cartésienne de $\Gamma$ :

$$\boxed{x^2 - y^2 - 4x + 6y - 2 = 0}$$

$\Rightarrow (x^2-4x) - (y^2-6y) - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 - 4 - [(y-3)^2 - 9] - 2 = 0$

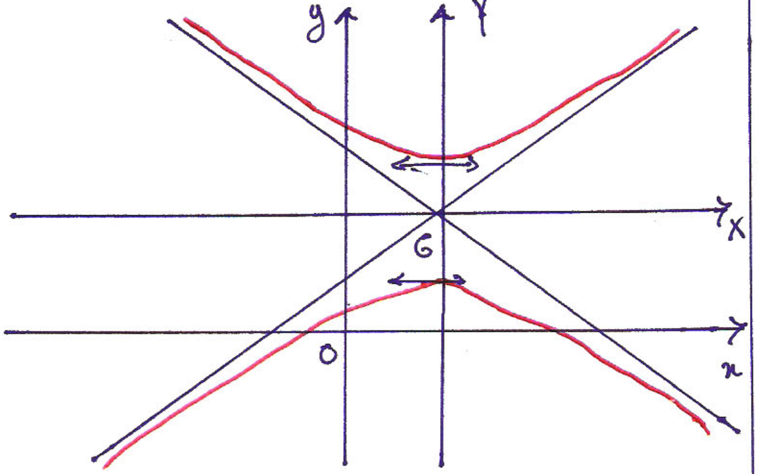
$\Rightarrow (x-2)^2 - (y-3)^2 - 4 + 9 - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 - (y-3)^2 = -3$

$\Leftrightarrow -\dfrac{(x-2)^2}{(\sqrt{3})^2} + \dfrac{(y-3)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

D'où $\Gamma$ est une hyperbole de centre $G(2;3)$ et d'axe focal $(G;\vec{v})$

b) Les sommets de $\Gamma$ : $A(2;\, 3+\sqrt{3})$ ; $A'(2;\, 3-\sqrt{3})$




## Exercice : 3

1) $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

a) * $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \times 0 = 0$ car $(x \to 0^-) \Rightarrow$

$\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot +\infty$ (F.I)

$f(x) = xe^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ on pose $t = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$ (limite usuelle)

Interprétation :

* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ($f$ est continue à gauche de zéro)

* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ($x=0$ asymptote verticale à (C) en $+\infty$)

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{0^-}} = 0$

$\Rightarrow f$ est dérivable en $0^-$ car $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

* $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(f(x) - (x+1)\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x - 1\right)$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \left(x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 1\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1$

on pose $t = \frac{1}{x}$ $(x \to -\infty \Rightarrow t \to 0)$

donc : $f(x) - (x+1) = \dfrac{e^t - 1}{t} - 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to} \left(f(x) - (x+1)\right) = 0$

$D : y = x+1$ est une A.O en $+\infty$ et en $-\infty$

c) $x \neq 0$ $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

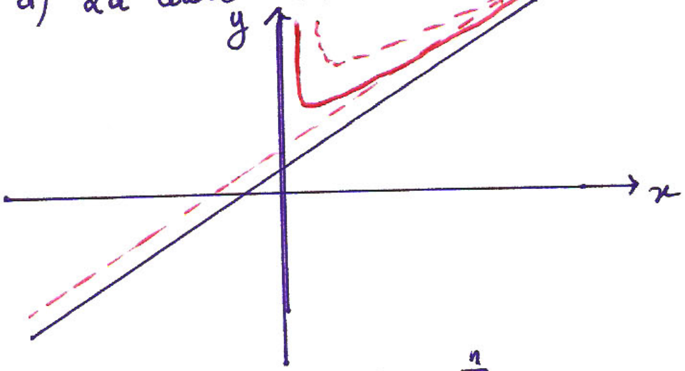
$f'(x) = \dfrac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ ; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

et $f(1) = e$

Tableau de variation de $f(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $e$ | ↗ | $+\infty$ |

d) La courbe (C) :




2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{n}{x}} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

a) soit $h(O;k)$ une homothétie . on a : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$ . $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow M'(x';y') \in h(C)$

$y = xe^{1/x} \Leftrightarrow \frac{1}{k}y' = \frac{1}{k}x' e^{\frac{1}{\frac{1}{k}x'}} \Rightarrow y' = x'e^{k/x'}$

par identification de $h(C)$ et $C_n$ : $k = n$

$\Rightarrow h_{(O;n)}(C) = C_n$

b) La tangente est horizontale pour $f_n'(x) = 0$

$f_n'(x) = \dfrac{x-n}{x} e^{\frac{n}{x}}$ ; $f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = n$

et $f_n(n) = ne$

$M_n(n; ne)$ les points sont sur la droite $\Delta : y = xe$

on peut aussi utiliser $h(O;n)$ sachant que $M_1(1;e)$ alors $M_n \in (OM_1)$

c) Déduction de T.V de $f_2$ :

| $x$ | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_2'$ | + | 0 ‖ − | 0 | + |
| $f_2$ | $-\infty \nearrow 0$ | ‖ $+\infty \searrow$ | $2e$ | $\nearrow +\infty$ |

Les abscisses et les ordonnés sont multipliées par 2 :

## Exercice : 4

$x \in ]-1 ; +\infty[$

1.a) $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$

$f(x) = \dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x+1}$

on pose $t = x+1$ : on a $\lim\limits_{x\to 0^+} t\ln t = 0$

donc $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{t\ln t + 1 - t}{t} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

($x = 1$ ; AV de (C) en $+\infty$ )

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \end{cases}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} - \dfrac{1}{x+1} = 0$

(C) admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction $(ox)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ et $f(0) = 0$

| $x$ | $-1$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow$ | 0 | $\nearrow +\infty$ |

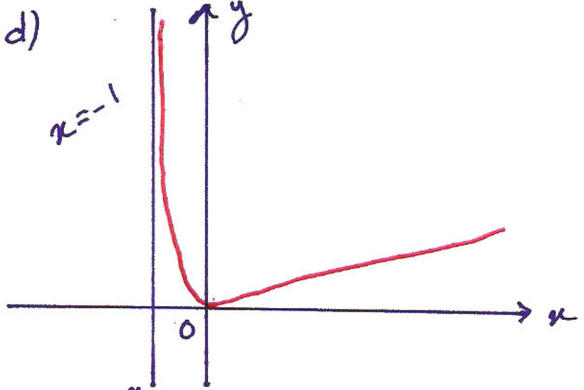
$f''(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 2(x+1)x}{(x+1)^4} = \dfrac{x+1-2x}{(x+1)^3}$

$f''(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$ ; $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ et

$f(1) = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$ . $f''$ s'annule et change de signe

donc $A(1 ; -1/2 + \ln 2)$ est un point d'inflexion de (C)

d)




2.a) $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)\,dt$

$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(1+t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t+1 \\ v'(t) = \dfrac{1}{1+t} \end{cases}$

$\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)\,.dt = \Big[(1+t)\ln(1+t)\Big]_0^x - \int_0^x (1+t)\times\frac{1}{1+t}\,dt$

$\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)\,.dt = (x+1)\ln(x+1) - x$

or $\forall t \geq -1$ $f(t) = \ln(1+t) - 1 + \dfrac{1}{1+t}$

$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de $f$ qui s'annule en 0

$F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t) - 1 + \frac{1}{1+t}\,dt$

$F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t)\,dt + \int_0^x -1 + \frac{1}{1+t}\,dt$

$F(x) = (x+1)\ln(x+1) - x + \Big[-t + \ln(1+t)\Big]_0^x$

$F(x) = (x+2)\ln(x+1) - 2x$

b) $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt = F\left(\frac{1}{n}\right)$

$A_n = \left(\dfrac{1}{n} + 2\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{2}{n}$

3.a) $x \in \mathbb{R}$ / $x \in ]0;1[$ on a :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1}$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 de raison $q = -x \neq 1$ et

Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{x+1} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$

D'où $\forall$ n :

$\dfrac{1}{x+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$

Corrigée par : Medsall - 7C3 - Rajia.camffor

b) Par intégration des deux membres de 0 à $x$ on obtient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\int_0^x t^{k-1}\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

$$\left[\ln(1+t)\right]_0^x = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

c) on multiplie par $x$ en a) et on trouve :

$$\frac{x}{1+x} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^k + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{1+x}$$

or $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

ce qui donne :

$$f(x) = \left[\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt\right] - \left[\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^k + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{1+x}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k} - 1\right)x^k + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{1+x}$$

Conclusion :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{x+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

d) $t \in [0;x] \cup [0;1]$

$1+t \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$

$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1} \Rightarrow 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^{n+1}\,dt$

$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \leqslant \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x$

$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \leqslant \frac{x^{n+2}}{n+2}$

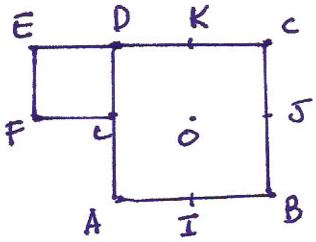
c) on a : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt = 0$, car $0 \leqslant x \leqslant 1$

et $\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2} = 0$

D'où : $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1-k}{k}x^k$

## Exo 15

1. a) Figure :




b) $r : \begin{cases} A \longrightarrow D \\ L \longrightarrow E \end{cases}$

$AL = DE = \frac{a}{2} \neq 0$ et $\vec{AL} \neq \vec{DE}$. donc il existe une unique rotation / $r(A) = D$ et $r(L) = E$

c) Angle de $r$ : $(\vec{AL}, \vec{DE}) = (\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Centre de $r$ : $\text{med}[AD] \cap \text{med}[LE] = F$

2. a) $S_1 : \begin{cases} J \longrightarrow O \\ C \longrightarrow D \end{cases}$

$J \neq C$ et $O \neq D \Rightarrow \exists!\, S_1 \ / \ S_1(J) = O$ et $S_1(C) = D$

b) Angle de $S_1$ = $(\vec{JC}, \vec{OD}) = (\vec{OK}, \vec{OD}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Le rapport $\lambda = \frac{OD}{JC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a/2} = \sqrt{2}$

c) on a : $J = B * C$ donc $O = S_1(B) * D$

(conservation du milieu) et par suite $S_1(B) = B$

On remarque donc que le centre de $S_1$ est $B$

Soit : $S_1(B ; \pi/4 ; \sqrt{2})$

d) $BOA$ est un triangle rectangle isocèle en $O$ et directe : $\Rightarrow \begin{cases} BA = \sqrt{2}\,BO \\ (\vec{BO}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$

Donc : $S_1(O) = A$

et $S_1(ABCD) = A'BDD'$ (voir figure)

3) $S_2\left(A ; \frac{1}{2} ; \frac{\pi}{4}\right)$ on a : $\frac{AL}{AO} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $(\vec{AO}, \vec{AL}) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{S_2(O) = L}$

ensuite : $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $(\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Rightarrow \boxed{S_2(C) = D}$

4) $f = S_2 \circ S_1^{-1}$ et $M \in P$ on a $S_1(M) = M_1$ et $S_2(M) = M_2$

a) $f$ est la composée de deux similitudes directes dont la somme des angles est 0 et le produit des rapports $= 1/2$

D'où $f$ est une homothétie : $f = h_{(O;\frac{1}{2})}$

$f(D) = S_2 \circ S_1^{-1}(D) = S_2(C) = D$

b) $f(M_1) = S_2 \circ S_1^{-1}(M_1) = S_2(M) = M_2$

si $M_1 \neq M_2$) alors $\overrightarrow{DM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM_1} \Rightarrow (M_1M_2)$ passe par un point fixe D.

c) $BMM_1$ est rectangle isocèle en M et directe

$\Rightarrow (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

de même pour $AMM_2 \Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM_2}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ alors : $(\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) = (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$

$= \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Les points $M$, $M_1$ et $M_2$ sont alignés ssi :

$(\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) = 0\ [\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{4} = 0\ [\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$

$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ; or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Alors : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\ [2\pi]$

Donc : $\Gamma_1$ est le $\mathcal{C}$ de centre O passant par A et B.

en définitif : $\Gamma_1 : \mathcal{C}_{(ABCD)}$

5.a) $G = \text{bar}$

| A | D | E |
|---|---|---|
| 1 | 3 | -2 |

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OE})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}))$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{ED}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$

donc $G = O$

$\Rightarrow O = \text{bar}$

| A | D | E |
|---|---|---|
| 1 | 3 | -2 |

b) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow 2MA^2 + 6MD^2 - 4ME^2 = a^2$

on pose : $\varphi(M) = MA^2 + 3MD^2 - 2ME^2 = \frac{a^2}{2}$

$\varphi(M) = MA^2 + 3MD^2 - 2ME^2$

O vérifie ce système car elle est son barycentre.

donc : $\varphi(M) = 2MO^2 + \varphi(O)$

avec $\varphi(O) = OA^2 + 3OD^2 - 2OE^2$

on a : $OA^2 = OD^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow OA^2 + 3OD^2 = 2a^2$

$OE^2 = OK^2 + KE^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$

donc $\varphi(O) = 2a^2 - \frac{5a^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow \varphi(M) = 2MO^2 - \frac{a^2}{2}$

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \varphi(M) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2MO^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$2MO^2 = a^2 \Leftrightarrow OM^2 = \frac{a^2}{2} = OA^2$

$\Gamma_2$ : est le cercle de centre O passant par A

$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ME}) \cdot (2\overrightarrow{ML} + 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MB})$

Réduction des vecteurs :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$

$2\overrightarrow{ML} + 2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ML} + 2\overrightarrow{MK} - 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB}$

$= 2\overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}) - \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$

$\Gamma_3$ : est le $\mathcal{C}_{[BD]}$

Conclusion: $\Gamma_3 = \Gamma_2 = \Gamma_1 = \mathcal{C}_{(ABCD)}$

Corrigée par : Med vall _7C3 - Raja Coraffour