http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Nom : Aminetou / Bouthiah
N° : 1247
classe : 7C

Exercice 8

on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x\,dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x\,dx$;

1) calculer $I + J$

2) En utilisant une integration par parties, calculer $I - J$

3) En déduire I et J

Solution

1) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x + x \cos^2 x)\,dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$

$I + J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I + J = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right) \Rightarrow$

$\boxed{I + J = \frac{\pi^2}{8}}$

2) on a $I - J =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x - x \cos^2 x)\,dx$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x \cos 2x)\,dx$

on utilise une intégration par parties :

on pose $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u(x) = -x \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$I - J = \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I - J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I - J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$\boxed{I - J = \frac{1}{2}}$

3) on resoud le système

$\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$ par addition :

$2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2 + 8}{16}$

par soustraction

$2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow J = \frac{\pi^2 - 8}{16}$

Exercice 3 : page 51

On pose, pour tout entier naturel n non nul $\forall x \in \mathbb{R}$

$F(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

1) Montrer que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$ et determiner sa primitive F telle que $F(0) = 1$

2) Ecrire $F(x)$ sous la forme d'un quotient en déduire une expression simple de $f(x)$

Solution

1) f est un polynome donc continue sur $\mathbb{R}$ alors f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont :

$F(x) = x + x^2 + x^3 + \dots n^n + k$

Si $F(0) = 1$ on a $k = 1$

$F(x) = 1 + n + n^2 + \dots + n^n$

2) $F(x)$ est la somme d'une suite Géometrique de 1er terme 1 et de raison $q = n$

(n ombre de termes : $n+1$)

$$\begin{cases} n \neq 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{n^{n+1} - 1}{n-1} \\ n = 1 \Rightarrow F(1) = n+1 \end{cases}$$

Si $n \neq 1$; $f(n) = F'(x)$

$$f(x) = \frac{(n+1)n^n(n-1) - 1(n^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{n\, n^{n+1} - (n+1)n^n + 1}{(n-1)^2}$$

Si $n = 1$; $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 \dots n x^{n-1}$

$f(1) = 1 + 2 + 3 \dots n$

Somme d'une suite arithmetique

$$f(1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

conclusion :

$$\begin{cases} n \neq 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{n n^{n+1} - (n+1)n^n + 1}{(n-1)^2} \\ n = 1 \Rightarrow f(1) = \dfrac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

C'est une forme reduite de $f(x)$

2

Exercice 5 page 53

Solution

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x} & ; 0\leq x<\dfrac{\pi}{2}\\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}}|f(x)| = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}}\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x}$

$= \dfrac{1}{1+(\pm\infty)^{2012}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0 = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f$ est continue en $\frac{\pi}{2}$

. $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

$0\leq \sin x\leq 1$
$0\leq \cos x\leq 1$ $\Rightarrow \tan x\geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+\tan^{2012}x}\geq 0 \Rightarrow f(x)$ est positive

f est strictement decroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

2) $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$

$f(\frac{\pi}{2}-x) = \dfrac{1}{1+\tan^{2012}(\frac{\pi}{2}-x)}$

$= \dfrac{1}{1+\cot^{2012}x} \Rightarrow$

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x) =$

$\dfrac{1}{1+\cot^{2012}x}+\dfrac{1}{1+\tan^{2012}x} =$

$\dfrac{1+\tan^{2012}x+1+\cot^{2012}x}{(1+\cot^{2012}x)(1+\tan^{2012}x)} \Rightarrow$

$1+\tan^{2012}x = \dfrac{1}{\cos^{2012}x}$

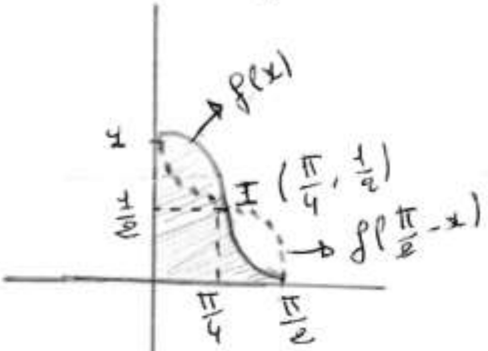
$1+\cot^{2012}x = \dfrac{1}{\sin^{2012}x} \Rightarrow$

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x) =$

$\dfrac{\dfrac{\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}{\sin^{2012}x\cdot\cos^{2012}x}}{\dfrac{1}{\sin^{2012}x\cdot\cos^{2012}x}} = 1 \Rightarrow$

$\boxed{f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1}$

$\Rightarrow$ le pt $I(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2})$ est un centre de symetrie



on a : $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1 \Rightarrow$

$\int_0^{1} f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)\,dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

or $I(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2})$ est une centre de symetrie de f donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \Rightarrow$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)\,dx$

$\boxed{= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}}$

Nom : Amintou / Baulthiah
N° : 12 47
classe : 7C

Exercice : 6 page : 54

pour tout entier naturel n on pose $U_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$

1) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n).

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive.
En déduire qu'elle est convergente

3) Montrer que : $\lim_{n \to \infty} U_n = 0$

Solution

$U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

1) la fonction $(t \to \frac{t^n}{1+t^2})$ est rationnelle est continue sur $[0, 1]$ pour tout n Alors l'intégrale U_n existe D'où l'écriture définie sur une suite numérique

2) $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \Rightarrow$

$0 \leq t^{n+1} \leq t^n$

$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$

$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

$0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

Alors décroissante et positive Donc minorée (par zéro) et décroissant Donc (U_n) est convergente

3) $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow$

$0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow$

$1 \leq 1 + t^2 \leq 2 \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

$\int_0^1 \frac{1}{2} t^n dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt$

$\left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^n\right]_0^1$

$\frac{1}{2n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

après le T. gendarme $\Rightarrow$

$\lim_{n \to \infty} U_n = 0$

Nom : Amine tou/Bouthiah
N° : 1247
classe : 7C

Exercice 4 page 52

soit la fonction f définie par tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2} + x$

on pose :

$$I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \; ; \; J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Calculer $f'(x)$; en deduire I et J

Solution

1) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \quad \text{Soit}$$

$$f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

L'integrale $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

peut être sous la forme

$$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$$

D'ou $I = \left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+1})^2\right]_0^1$

$$I = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(1)^2$$

Enfin $I = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$

L'integrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

peut être sous la forme

$$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\,dx$$

d'ou $J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$$

Enfin $\boxed{J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$